ЗМІСТ:

7. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

7.1. Приріст аргументу й функції

Означення. *Приростом деякої змінної величини називається різниця між новим значенням цієї величини і її колишнім значенням, тобто приріст змінної величини дорівнює $x_1 - x$.*

Для позначення приросту використовують грецьку букву Δ; так, наприклад, $\Delta x = x_1 - x$ позначає приріст величини x. Додаючи до значення змінної величини її приріст, одержимо прирощене значення цієї величини, тобто $x + \Delta x$ є прирощене значення величини x.

Припустимо, що y є деяка функція від аргументу x, тобто $y = f(x)$. Дамо аргументу x приріст Δx; тоді y одержить відповідний приріст Δy. Записуємо так:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Із цього: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Поняття приріст функції пояснимо геометрично.

Нехай крива AB - графік функції $y = f(x)$ (рис.1). Може статися, що для деякого x при прямуванні Δx до нуля точка N′ необмежено наближається до нуля. У такому випадку функція $y = f(x)$ називається *неперервною* при даному значенні x.

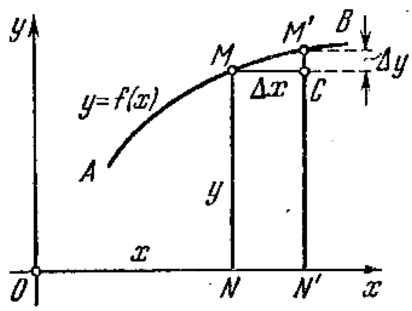


Рис.1

Означення 1.

Функція f (x), визначена на множині X, називається неперервною при $x = x_1$ (або неперервною в точці x_1), якщо:

1) функція визначена при $x = x_1$ (тобто x_1 є X);

2) приріст функції в точці x_1 прямує до нуля, коли приріст аргументу $\Delta x_1 = x - x_1$ прямує до нуля, тобто

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0}\left[f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)\right] = 0,$$

де нескінченно малий приріст Δx_1 пробігає лише ті значення, для яких $f(x_1 + +\Delta x_1)$ має сенс. При цьому припускаємо, що x_1 є *граничною* точкою множини X. Інакше, функція називається *неперервною в даній точці*, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

Функція неперервна тоді, коли $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon, x_1) > 0$ таке, що

$| f(x) - f(x_1) | = | f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) | < \varepsilon$, якщо $x = x_1 + \Delta x_1$ й $0 < | \Delta x_1| < \delta$ (Δx_1 – будь-який припустимий приріст).

Означення 2.

Функція f(x) називається неперервною на даній множині X, якщо

1) вона визначена на цій множині (тобто $\forall x \in X\ \exists f(x)$);

2) неперервна в кожній точці цієї множини, тобто $\forall x \in X$ справедлива рівність $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[f(x + \Delta x) - f(x)\right] = 0,$ де $x + \Delta x \in X$.

Приклад. Функція

$$f(x) = \begin{cases} 1 & при\ x \in [0,1] \\ 0 & при\ x \notin [0,1] \end{cases}$$

неперервна на відрізку X = [0, 1], хоча вона не є безперервною на осі $-\infty < x < +\infty$.

Означення 3.

Точка, у якій порушується неперервність функції, називається точкою розриву цієї функції.

Означення. *Якщо в точці розриву існують кінцеві границі $f(x-0)$ і $f(x+0)$, то вона називається точкою розриву I роду, а величина $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ – стрибком функції f у точці x_0.*

Означення. *Якщо стрибок функції в точці x_0 дорівнює 0, тобто $f(x_0+0) = f(x_0-0) \neq f(x_0)$, то точка x_0 називається точкою усувного розриву.*

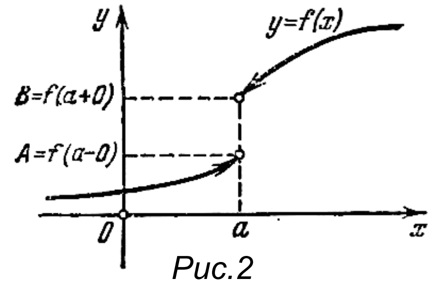


Рис.2

Означення. *Всі інші точки розриву функції f(x) називаються точками розриву II роду* (рис. 2).

Серед них важливе значення мають точки нескінченного розриву x, для яких існують (скінчені або нескінченні) однобічні границі

$$\lim f(x) \quad u \quad \lim f(x)$$

і хоча б одна з них є нескінченною (рис.3).

У цьому випадку, пряма $x = x_1$ називається *вертикальною асимптотой* графіка функції $y = f(x)$.

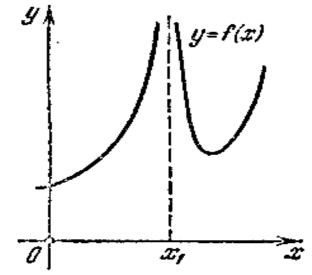


Рис.3

Означення. *Функція, що допускає на даному проміжку лише скінечне число точок розриву першого роду, називаються кусково-неперервною на цьому проміжку*. Помітимо, що в точках розриву кусково-неперервна функція може бути не визначена.

Відзначимо, що для неперервності функції f (x) у точці x_0 необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність трьох чисел:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

7.2. Основні теореми про неперервні функції

Теорема 1. *Сума скінченого числа неперервних функцій є функція неперервна.*

Теорема 2. *Добуток скінченого числа неперервних функцій є функція неперервна.*

Теорема 3. *Частка від ділення двох неперервних функцій є функція , неперервна у всіх точках, у яких дільник відмінний від нуля.*

Наслідок. Дробова раціональна функція

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

неперервна всюди, за винятком тих значень x, де знаменник обертається на нуль.

Теорема 4. *Неперервна функція від неперервної функції є функція також неперервна; інакше кажучи, складна функція, що складається з неперервних функцій, неперервна.*

$$\lim_{x \to x_1} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \to x_1} \varphi(x)) = f(\varphi(x_1)),$$

тобто складна функція $f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_1.

Теорема 5. *Якщо функція $y = f(x)$ неперервна й строго монотонна на проміжку < a, b >, то існує однозначна обернена функція*

$x = \varphi(y)$, визначена на проміжку $< f(a), f(b) >$, причому остання також неперервна й монотонна в тому ж сенсі.

8. ПОХІДНА

8.1. Означення похідної

Означення. *Похідна функції y = f (x) у даній точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy у цій точці до приросту аргументу Δx, коли він прямує до нуля:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Помітимо , що Δx може бути як додатним, так і від’ємним.

Похідну функції y =f (x) у точці x_0 позначають значком $y^{/}(x)$ або $f^{/}(x)$. Отже,

$$f^{/}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Виходячи з означення похідної можна сформулювати правило знаходження похідної функції в будь-якій точці.

<u>Щоб знайти похідну функції y = f (x), потрібно:</u>

1) Розглянути два значення аргументу x і x + Δx, де Δx - приріст аргументу.
2) Визначити приріст функції: Δy = (x +Δx) - f (x).
3) Знайти відношення приросту функції до приросту аргументу: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
4) Обчислити межу цього відношення при Δx >0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

8.2. Задача про дотичну

Похідна має певний геометричний зміст. Геометричне тлумачення похідної тісно пов'язане з поняттям дотичної до кривої. Нехай дана неперервна функція y=f(x), графік якої зображений на рис.4.

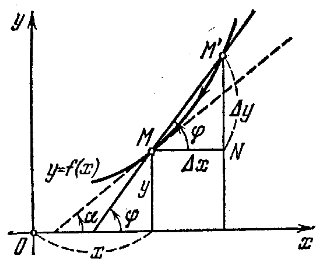


Рис.4

Означення. *Дотичною до кривої в точці M називається граничне положення січної MM_1, коли точка M_1 прямує до точки M, залишаючись на кривій.*

Дотична являє собою пряму, тому її рівняння має вигляд:

y = kx + b, де k - кутовий коефіцієнт, що буде називатися кутовим коефіцієнтом дотичної.

Т... g α, то з означення дотичної і неперервності функції: $y = tg\, x (x \neq \frac{\pi}{2})$ маємо: $k = \lim_{\Delta x \to 0} k_1$.

Користуючись похідною, можна знайти значення k у заданій точці кривої. Геометричний зміст похідної: $f^{/}(x) = k = tg\, \alpha$.

Теорема 1. *Кутовий коефіцієнт k дотичної до кривої y = f (x) у точці $M(x_0, y_0)$ дорівнює значенню похідної функції y = f (x) при $x = x_0$: $k = f^{/}(x_0)$.*

Справедливе твердження: *Якщо функція має похідну в точці, то у відповідній точці існує дотична до її графіка. Причому значення похідної збігається з кутовим коефіцієнтом дотичної.*

У цьому полягає *геометричний зміст похідної*. Знаючи кутовий коефіцієнт дотичної до кривої й точку дотику, можна знайти рівняння дотичної.

Теорема 2. *Рівняння дотичної до кривої y = f (x) у точці M (x_0 ;y_0), де $y_0=f(x_0)$ має вигляд:*

$$y - y_0 = f^{/}(x_0)(x - x_0)$$

8.3. Геометричне значення похідної

Для даної функції y = f (x) її похідна $y' = f'(x)$ для кожного значення x дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції у відповідній точці.

Дотична до графіка функції y = f (x) утворює у даній точці з додатним напрямком осі Ox гострий або тупий кут, незважаючи на те, чи буде похідна функції в цій точці додатня або від'ємна. Якщо ж похідна дорівнює нулю, то дотична до графіка функції паралельна осі Ox. Справедливі також і обернені твердження.

9. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ПОХІДНІ

9.1. Вступні зауваження

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням функції.*

Означення. *Функція називається диференційовною у деякій точці, якщо вона має в цій точці кінцеву похідну, і диференційовною на деякій множині, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї множини:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' .$$

Теорема. *Якщо функція диференційовна в деякій точці, то вона неперервна в цій точці. Обернене твердження неправильно: неперервна функція може не мати похідній.*

Наслідок. Якщо функція має розрив в деякій точці, то вона не має похідній у цій точці.

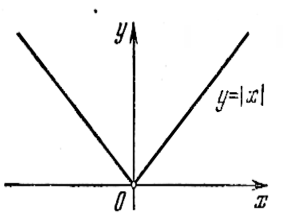


Рис.5

Прикладом неперервної функції, що не має похідної в одній точці, є функція y = |x|. Ця функція неперервна при x = 0, але не є диіеренційовною для цього значення, тому що в цій точці x = 0 графіка функції не існує дотичної. (рис.5)

Вперше виразне розходження між поняттями неперервності й диференційовності функції було дано геніальним математиком Н.І. Лобачевським.

Помітимо, що похідна $y' = f'(x)$ неперервної функції y = f (x) сама *не обов'язково є неперервною.*

Означення. *Якщо функція f (x) має неперервну похідну $f'(x)$ на проміжку <a,b>, то функція називається гладкою на цьому проміжку*.

Означення. *Функція f (x), похідна якої $f'(x)$ допускає лише кінцеве число точок розриву, і при тому першого роду, на даному проміжку < a, b >, називається кусково-гладкою на цьому проміжку.*

9.2. Похідні від деяких найпростіших функцій

<u>1. Похідна постійної величини дорівнює нулю: $C' = 0$.</u>

Доведення:

1) Дамо аргументу x приріст Δx й одержимо нарощене значення функції: $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C$.

2) Знайдемо приріст функції: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$.

3) Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$

4) Знайдемо похідну: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - \lim 0 = 0.$ Таким чином, $C' = 0$.

2. Похідна незалежної змінної дорівнює одиниці: $x' = 1$.

Доведення:

Нехай $y = f(x) = x$. Знайдемо y'.

1) $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = x + \Delta x$.

2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$.

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $x' = 1$.

3. Похідна степеня x^n (n- ціле додатне число): $(x^n)' = n\,x^{n-1}$

тобто вона дорівнює показнику степеня, помноженому на ту ж основу в степені, на одиницю менше. Переконаємося в справедливості формули при n =2.

Нехай $y = f(x) = x^2$.

Доведення:

1) $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

2) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$, що відповідає нашій формулі при n = 2.

При n = 3, $y = f(x) = x^3 \to y' = 3x^2$.

9.3. Основні правила диференціювання функцій

1. Похідна константи.

Похідна постійної величини дорівнює нулю.

$f(x) = C$, тоді $C' = 0$.

Переводячи цей результат на мову механіки, одержуємо наступну наочну ілюстрацію нашої теореми: швидкість точки, що перебуває в спокої, дорівнює нулю.

2. Похідна суми.

Теорема 1. *Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа диференційовних функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі похідних цих функцій:*

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u_1 \pm u_2 \pm u_3)' = u'_1 \pm u'_2 \pm u'_3.$$

Наслідок. Якщо дві диференційовні функції відрізняються на константу, то їхні похідні рівні, тобто

$$(u + c)' = u'.$$

3. Похідна добутків двох функцій.

Теорема 2. *Якщо функції $u = f(x)$ і $v = g(x)$ диференційовні в деякій точці x_0, то в цій точці диференційовний і їхній добуток $u(x) \cdot v(x)$ причому:*

$$(u\,v)' = u\,v' + u'\,v,$$

тобто похідна добутків двох функцій дорівнює сумі добутків кожної із цих функцій на похідну іншої.

Наслідок 1. Константу можна виносити за знак похідної:

$$(c\,u)' = c\,u'.$$

Наслідок 2. Похідна добутку декількох диференційовних функцій дорівнює сумі добутків похідній кожного зі співмножників на всі інші:

$$(u\,v\,w)' = u'\,v\,w + v'\,u\,w + w'\,u\,v.$$

4. Похідна частки двох функцій.

Теорема 3. *Якщо функції $u = f(x)$ і $v = g(x)$ диференційовні в деякій точці x_0 й $v(x_0) \neq 0$, то в цій точці диференційовні і їхня частка u / v, причому:*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2},$$

тобто похідна частки двох функцій дорівнює дробу, чисельник якої є різниця добутків знаменника на похідну чисельника й чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадрат колишнього знаменника.

Наслідок 1. Якщо знаменник дробу - постійна величина (константа), то

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{cu' - uc'}{c^2} = \frac{u'}{c}, \text{ тобто } \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}.$$

Наслідок 2. Якщо чисельник дробу - постійна величина (константа), то

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{vc' - cv'}{v^2} = -\frac{cv'}{v^2}.$$

При $c = 1$ знаходимо $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

1. *Похідна ступеня із цілим від'ємним показником:* $\left(x^{-m}\right)' = -mx^{-m-1}$.
2. *Похідна від tg x:* $y' = \frac{1}{cos^2 x} = \sec^2 x$.
3. *Похідна від ctg x:* $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$.

9.4. Похідна складної функції

Розглянемо складну функцію $y = f[\,g(x)\,]$, де $u = g(x)$ - проміжний аргумент, а x - основний. Оскільки в утворенні складної функції y беруть участь два аргументи u і x, то будемо вказувати, по якому саме аргументу взята похідна за допомогою відповідного значка внизу. Саме похідну функції $y(x)$ по x будемо позначати:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Похідні функції $y(u)$ по u й $u(x)$ по x будемо відповідно позначати:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u \quad и \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x.$$

Теорема. *Якщо зростаюча (спадна) функція $u = g(x)$ має похідну u'_x і функція $y = f(u)$ має похідну y'_u, то похідна складної функції $y = f[\,g(x)\,]$ по аргументу x дорівнює добутку цих похідних:*

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Зауваження. У випадку складної функції $y = f(x)$, $u = g(x)$ аргумент u функції y, називається проміжним аргументом на відміну від незалежної змінної x.

Тоді правило можна сформулювати так:

Похідна складної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу й на похідну проміжного аргументу u по незалежній зміній x.

Для складної степеневої функції $y = u^n$, де u - диференційовна функція аргументу x, а n - ціле додатне число, формула $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ на підставі правила $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ буде виглядати: $\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$.

9.5. Формула бінома Ньютона

Біномом Ньютона називають формулу, по якій можна знаходити будь-який ступінь двочлена – бінома. Знайомі формули квадрата суми, куба суми й т.д. є окремими випадками формули бінома для показників ступеня, рівних двом, трьом.

Використовуючи поняття похідної, можна одержати формулу для пошуку будь-якого степеня бінома.

Теорема. *Якщо n - натуральне число, то*

$$\left(1+x\right)^n = x^n + n\,x^{n-1} + \frac{n\left(n-1\right)}{1\cdot 2}x^{n-2} + \ldots + n\,x + 1. \qquad (9.1)$$

Формулу бінома записують трохи інакше, використовуючи позначення n! (факторіал): n! = 1·2·3...n.

$$\left(1+x\right)^n = 1 + nx + \frac{n\left(n-1\right)}{2!}x^2 + \frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{3!}x^3 + \ldots + x^n. \qquad (9.2)$$

Наслідок 1.

$$\left(a+b\right)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n\left(n-1\right)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n. \qquad (9.3)$$

Наслідок 2.

Сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n:

$$\left(a+b\right)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + \frac{n\left(n-1\right)}{2!} + \ldots + \frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdot\ldots\cdot 1}{n!} = 2^n. \qquad (9.4)$$

Застосування формули бінома Ньютона в наближених обчисленнях

Помітимо попередньо, що

$$\left(1-x\right)^n = \left[1+\left(-x\right)\right]^n = 1 - \frac{n}{1!}x + \frac{n\left(n-1\right)}{2!}x^2 - \frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{3!}x^3 + \ldots + \left(-1\right)^n\frac{n\left(n-1\right)\ldots 1}{n!}x^n. \qquad (9.5)$$

Якщо в рівностях (9.1) і (9.2) число x є малим у порівнянні з одиницею то, відкинувши члени, що містять $x^2, x^3, \ldots, x^n$, одержимо наближені рівності:

$$\left(1\pm x\right)^n \approx 1 \pm nx. \qquad (9.6)$$

При цьому абсолютна похибка

$$\delta \le \left|\frac{n(n-1)}{2!}x^2\right| + \left|\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3\right| + \ldots + \left|x^n\right|.$$

Тому що для малих x : $\left|x^2\right| > \left|x^3\right| > \ldots > \left|x^n\right|$, то

$$\delta \le \left(\frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + 1\right)x^2.$$

Відповідно до рівності (9.4), сума біноміальних коефіцієнтів, починаючи із третього, дорівнює $2^n - n - 1$, тому

$$\delta \le \left(2^n - n - 1\right)x^2 \qquad (9.7)$$

Заміняючи в рівностях (9.6) x через $\frac{x}{n}$, одержимо:

$$\left(1 \pm \frac{x}{n}\right)^n \approx 1 + n\cdot\frac{x}{n} = 1 \pm x,$$

звідки, витягаючи з обох частин корінь степеня n, одержимо наближені рівності:

$$\sqrt[n]{1\pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{n} \qquad (9.8)$$

Формули (9.6) і (9.8) використовують в наближених обчисленнях.

9.6. Похідна оберненої функції

Теорема. *Для диференційовної функції з похідною, не рівною нулю, похідна оберненої функції дорівнює оберненій величині похідної даної функції.*

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 \div \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, звідси $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, де $x'_y -$ похідна оберненої функції.

Зауваження. Якщо користуватися позначеннями Лейбніца, то формула прийме вид:

$$\frac{d_x}{d_y}=\frac{1}{\dfrac{d_y}{d_x}}$$

Приклад.

Нехай $y = x + x^3$. Має $y'_x = 1+3x^2$, і отже, $x'_y = \dfrac{1}{1+3x^2}$.

9.7. Поняття про похідні вищих порядків

Похідна $f'(x)$ від функції $f(x)$ називається похідною першого порядку і являє собою деяку нову функцію. Може статися, що ця функція сама має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку називається похідною другого порядку або другою похідною і позначається так: $f''(x)$. Отже, $f''(x)=[f'(x)]'$.

Похідна від похідної другого порядку, якщо вона існує, називається похідною третього порядку або третьою похідною і позначається так: $f'''(x)$, тобто $f'''(x)=[f''(x)]'$, і т.д.

Для позначення подальших похідних використовують римські цифри.

Приклад 1. Нехай $y=\sin x$, тоді $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$, $y'''=-\cos x$, $y^{IV}=\sin x\ldots$

Приклад 2. $y = x^3$, тоді $y'=3x^2,\ y''=6x,\ y'''=6.$ Всі похідні більш високих порядків від цієї функції дорівнюють нулю.

9.8. Таблиця основних формул диференціювання

1. $c'=0$, c - const.

2. $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}, x>0,\ \alpha\in R.$

   $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}, x\in R,\ \alpha\in N.$

3. $\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a, x\in R,\ a>0, a\neq 1.$

   $\left(e^{x}\right)'=e^{x}, x\in R.$

4. $\left(\log_a|x|\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}, x\neq 0,\ a>0, a\neq 1.$

   $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}, x\neq 0.$

5. $\left(\sin x\right)'=\cos x,\quad x\in R.$

6. $\left(\cos x\right)'=-\sin x,\quad x\in R.$

7. $\left(tgx\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x},\quad x\neq\dfrac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z.$

8. $\left(ctgx\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x},\quad x\neq \pi n,\ n\in Z.$

9. $\left(\arcsin x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad |x|<1.$

10. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1.$

11. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R.$

12. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R.$

13. $\left(shx\right)' = chx, \quad x \in R, \quad shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}.$

14. $\left(chx\right)' = shx, \quad x \in R, \quad chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}.$

15. $\left(thx\right)' = \dfrac{1}{ch^2 x}, \quad x \in R, \quad thx = \dfrac{shx}{chx}.$

16. $\left(cthx\right)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0.$

10. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

10.1. Дослідження функцій за допомогою похідної

Користуючись похідною, можна вказати необхідні й достатні ознаки зростання й спадання функції.

Теорема 1. *Якщо функція, що має похідну для всіх значень аргументу з інтервалу (a, b), зростає на цьому інтервалі, то похідна в точках інтервалу (a,b), приймає або додатне значення, або в окремих точках дорівнює нулю.*

Теорема 2. *Якщо функція, що має похідну для всіх значень аргументу з інтервалу (a,b) , спадає на цьому інтервалі, то похідна в точках цього інтервалу приймає або від'ємне значення, або в окремих точках дорівнює нулю.*

Дані теореми виражають необхідні ознаки зростання й спадання функції.

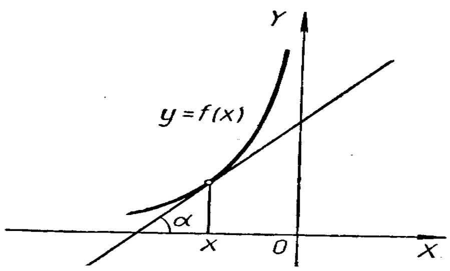


Рис.6

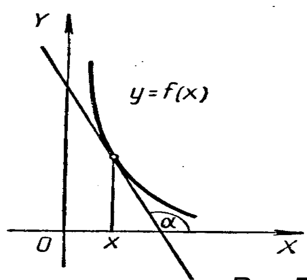


Рис.7

Рис. 6 – зростаюча функція
Рис. 7 – спадна функція

Важливі також і обернені теореми, що виражають достатні ознаки зростання й спадання функції.

Теорема 3. *Якщо похідна функції в інтервалі (a,b) додатня або в окремих точках дорівнює нулю, то функція в інтервалі (a,b) зростає.*

Теорема 4. *Якщо похідна функції в інтервалі (a,b) від'ємна або в окремих точках обертається в нуль, то функція в інтервалі (a,b) спадає.*

Якщо похідна в точці додатня, то дотична до графіка функції у відповідній точці утворить із додатним напрямком осі абсцис гострий кут. Крива піднімається нагору, функція зростає.

У випадку від'ємного значення похідної дотична утворить із віссю абсцис тупий кут (менше π). Крива опускається вниз, функція спадає.

Доведення теорем 3 й 4 опирається на досить цікаву й важливу теорему Лагранжа, що називають також теоремою про середній або формулою кінцевих приростів.

10.2. Інтервали монотонності

Функція може в одних інтервалах зростати, а в інших спадати.

Означення. *Інтервали, у яких функція зростає або спадає, називаються інтервалами монотонної зміни функції.*

В окремому випадку вся область існування функції може виявитися одним проміжком монотонності. Так, наприклад, це має місце у випадку функції $y = x^3$.

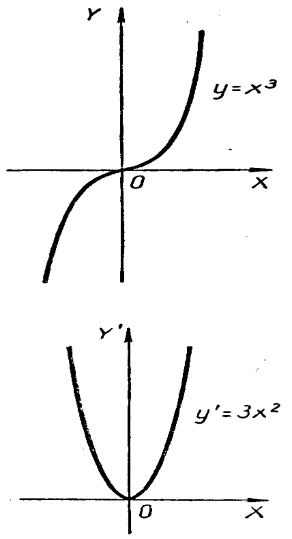


Рис.8

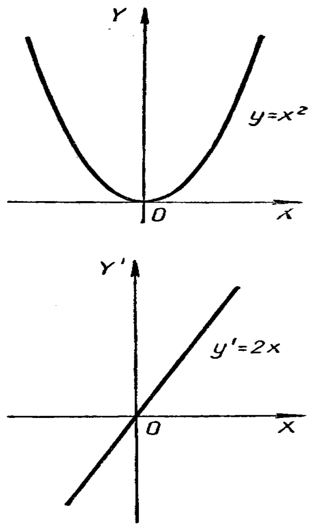


Рис. 9

10.3. Основні теореми диференціального обчислення

Теорема Ферма. *Нехай функція f(x) визначена на інтервалі (a, b) і в деякій точці x_0 цього інтервалу має найбільше або найменше значення. Тоді якщо в точці x_0 існує похідна, то вона дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$ (рис. 10).*

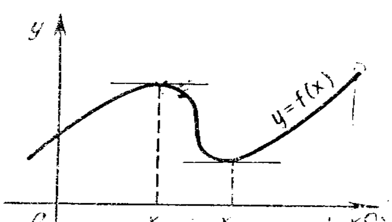


Рис. 10

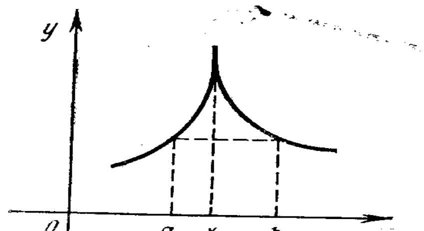


Рис. 11

Теорема Ролля. *Нехай на відрізку [a, b] визначена функція f(x), причому*:

1)° *f(x) неперервна на [a, b];*

2)° *f(x) диференційовна на (a, b);*

3º) *f(a)=f(b).*

Тоді існує точка $c \in (a,b)$, у якій $f'(c)=0$ (рис. 11).

Теорема Лагранжа. *Нехай на відрізку [a,b] визначена функція f(x), причому:*
1)° *f(x) неперервна на [a, b];*

2)° *f(x) диференційовна на (a, b) (рис. 12). Тоді існує точка з((a, b) така, що справедливо формулу:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

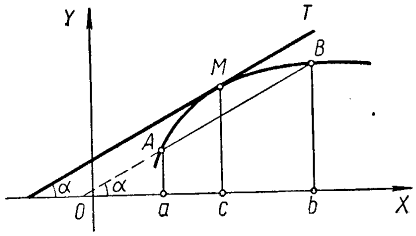


Рис.12

Теорема Коші. *Нехай функції f'(x) і g(x) неперервні на [a, b] і диференційовні на (a, b). Нехай, крім того, g'(x)$\neq$ 0. Тоді існує точка c $\in$ (a, b) така, що справедлива формула:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Правило Лопіталя.

I. Розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$. Перше правило Лопіталя.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0,\ mo\quad \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$ *коли остання границя існує (скінчена або нескінчена).*

II. Розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$. Друге правило Лопіталя.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty,\ mo\quad \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$ *коли остання границя існує (скінчена або нескінчена).*

Правила правильні й у тому випадку, коли $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to a-$ і $x\to a+$.

III. Невизначеності виду $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0°, 1^∞, ∞° і їхнє розкриття.

Невизначеності виду $0\cdot\infty$ і $\infty-\infty$ зводяться шляхом алгебраїчних перетворень до невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ й $\frac{\infty}{\infty}$, а потім розкриваються за допомогою правила Лопіталя.

Невизначеності виду 0°, 1^∞, ∞^0 за допомогою тотожності: $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ \ln\ f(x)}$ зводяться до невизначеності виду $0\cdot\infty$.

Формула Тейлора.

Теорема Тейлора. *Нехай функція f(x) має в точці a і в деякому її околу похідні порядку $n+1$. Нехай x — будь-яке значення аргументу із зазначеного околу $x\neq a$. Тоді між точками a і x знайдеться точка ξ така,що справедлива формула Тейлора:*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\mathrm{K}+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Останній член у формулі Тейлора називається *залишковим членом у формі Лагранжа* й позначається $R_{n+1}(x)$.

Тому що точка $\xi\in(a,x)$, то знайдеться число θ з інтервала $0<\theta<1$ таке, що $\xi=a+\theta(x-a)$ і залишковий член приймає вид:

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ 0\langle\,\theta\,\langle\ 1.$$

Якщо функція $f^{(n+1)}(x)$ обмежена в околі точки a, то залишковий член $R_{n+1}(x)$ є нескінченно малим більш високого порядку, ніж $(x-a)^n$ при $x\to a$: $R_{n+1}(x)=o[(x-a)^n]$ при $x\to a$.

Останнє співвідношення називається *залишковим членом у формі Пеано.*

Формулу Тейлора при a = 0 називають формулою Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x).$$

Залишковий член має вигляд:

1. у формі Лагранжа: $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta\, x)}{(n+1)\,!}x^{n+1},\ 0\langle\theta\langle 1,$

2. у формі Пеано: $R_{n+1}(x)=o(x^n)$.

Розкладання елементарних функцій по формулі Маклорена.

1) $f(x)=e^x$. Тому що: $f(x)=f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n+1)}(x)=e^x,$
$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n+1)}(0)=1,$
то формула Маклорена має вигляд:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n). \tag{10.1}$$

2) $f(x)=\sin x$. Тому що $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$f^{(n)}(0)=\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & n-парне,\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n-непарне\end{cases}$, то формула Маклорена має вигляд:

$$\sin x=x-\frac{x^n}{3\,!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}). \tag{10.2}$$

3) $f(x)=\cos x$. Тому що: $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right),$

$f^{(n)}(0)=\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & n-непарне,\\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n-парне\end{cases}$, то формула Маклорена має вигляд:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}). \tag{10.3}$$

У формулі (10.2) залишковий член записаний у вигляді $o(x^{2n})$, а не у вигляді $o(x^{2n-1})$, тому що наступний за останнім член дорівнює нулю (теж саме відноситься до формули (10.3)).

10.4. Екстремум функції однієї змінної

10.4.1. Максимум і мінімум функції

Означення. *Функція y = f(x) має при x = c, c є (a;b) максимум, якщо в деякому околі точки c при x ≠ c виконується нерівність f(c) > f(x), тобто якщо значення функції в точці c більше всіх значень функції в цьому околі й праворуч і ліворуч від точки c (рис. 13).*

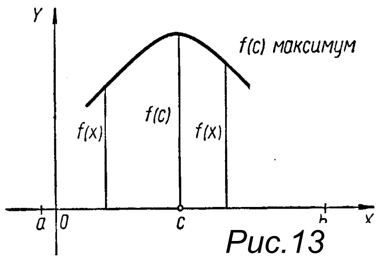
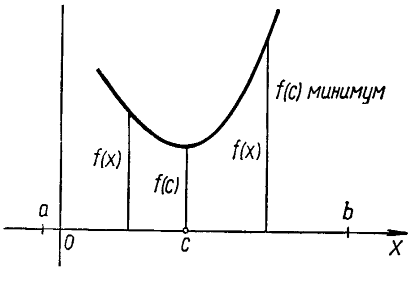


Рис.13



Означення. *Функція y = f(x) має при x = c мінімум, якщо в в деякому околі*

Рис.14

Рис.16

точки c при x ≠ c виконується нерівність: f(c)<f(x), тобто якщо значення функції в цій точці з менше всіх значень функції в цьому околі й праворуч і ліворуч від точки c (рис. 14).

Латинською мовою слова “максимум” й “мінімум” означають “найбільше” й “найменше” значення. Тому їх іноді називають *локальним мінімумом* і *локальним максимумом*. Функція може мати кілька максимумів і мінімумів, причому мінімум може виявитися навіть більше максимуму. Тому їх не можна ототожнювати із найбільшим і найменшим значеннями функції в області визначення. У точках c, c_3, c_5, c_7 функція має максимум, у точках c_2, c_4, c_6, c_8 - мінімум, причому мінімум у точці c_8 більше максимуму в точках c_3 і c_5.

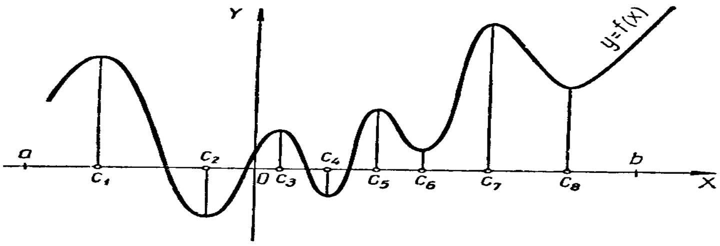


Рис.15

Максимум або мінімум функції називають *екстремумом функції*.

Точки, у яких функція має екстремум, називають *точками екстремума функції.* Так, на малюнку 15, точки c_1, c_2, c_3...;c_8... є точки екстремума функції.

10.4.2. Необхідна умова існування екстремума функції

Теорема. *Якщо функція має похідну в кожній точці інтервалу (a;b), то в точці екстремума, похідна дорівнює нулю.*

Означення. *Нулі похідній, тобто точки, у яких* $f'(x)=0$, *називаються стаціонарними точками функції f (x)* таким чином, якщо функція має похідну, то її екстремум треба шукати в стаціонарних точках. Інакше кажучи, якщо похідна функції існує й обертається в нуль, то функція екстремума не має. Може статися, що функція буде мати екстремум у тих точках, у яких вона не має похідних.

Отже, функція може мати екстремум тільки в стаціонарних точках або в точках, де її похідна не існує.

10.4.3. Достатні умови існування екстремума

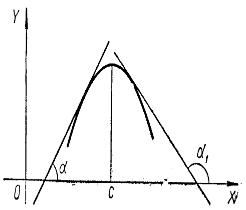


Рис.16

Теорема 1. *Нехай функція y = f(x) має похідну в кожній точці деякого інтервалу (a;b) і нехай точка x=c цього інтевала є стаціонарна точка функції. Тоді, якщо в деякому околі точки c, ліворуч від точки c, похідна додатня, а праворуч від точки c похідна від’ємна, то в точці c функція має максимум* (рис. 16).

Теорема 2. *Нехай функція y = f (x) має похідну в кожній точці інтервалу (a;b) і нехай точка x = c цього інтервалу є стаціонарна точка функції. Тоді , якщо в деякому околі точки c ліворуч від точки c похідна від’ємна, а праворуч додатня, то в точці c функція має мінімум* (рис. 17).

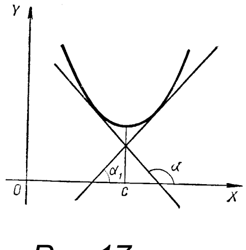
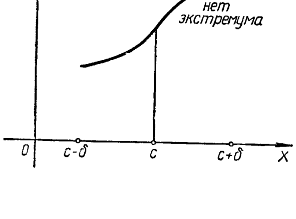


Рис.17

Теорема 3. *Якщо в деякому околі стаціонарної точки x = c похідна функції як праворуч, так і ліворуч від точки c має той самий знак, то функція в цій точці c екстремума не має* (рис. 18, 19).



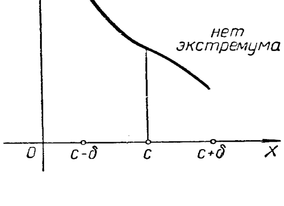


Рис.18 Рис.19

10.4.4. Правила знаходження екстремуму функції

1. Знайти похідну функції.
2. Знайти стаціонарні точки, тобто розв'язати рівняння $f'(x)=0$.
3. Визначити знак похідної в околі кожної стаціонарної точки.

Теорема. *Якщо функція неперервна на сегменті (або інтервалі), має єдиний екстремум, то у випадку максимуму це буде її найбільше значення (рис.20), а у випадку мінімуму - найменше (рис.21).*

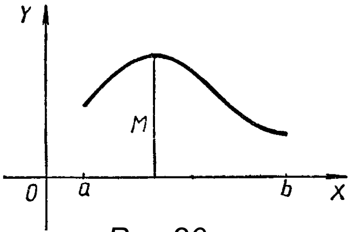


Рис.20

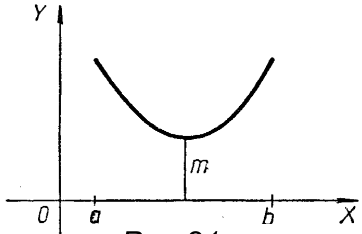


Рис.21

10.5. Опуклість графіка функції. Точка перегину

Означення. *Графік диференційовної функції y = f (x) називається опуклим вниз на проміжку < a,b >, якщо відповідна частина кривої y=f(x) (x є < a,b >) розташована вище дотичної, проведеної в будь-якій її точці M (x,f(x))* (рис. 22 а).

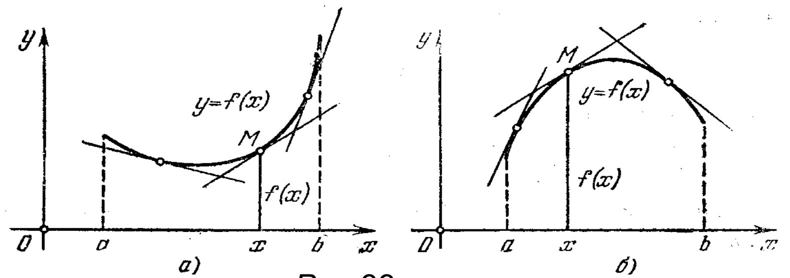


Рис.22

Аналогічно, *графік диференційовної функції y = f(x) називається опуклим вгору на проміжку <a, b>, якщо відповідна частина кривої y=f(x) розташована нижче дотичній, проведеної до будь-якої її точки M (x, f(x))* (рис. 24 б).

Теорема. (*Достатні умови опуклості графіка функції*)

1) Якщо двічі диференційовної функції y = f(x) друга її похідна $f''(x)$ додатня усередині проміжку <a,b>, то графік цієї функції опуклий вниз на даному проміжку.

2) Якщо ж друга похідна $f''(x)$ від'ємна усередині проміжку, то графік функції y = f(x) опукла вгору на цьому проміжку.

Правило спрощується, якщо функція має єдиний екстремум.

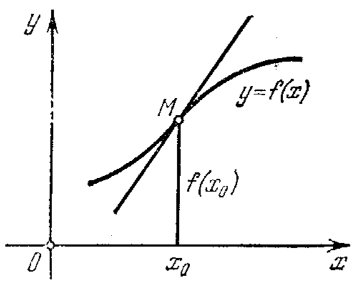


Рис.23

Означення. *Точкою перегину графіка функції y = f(x) називається його точка, при переході через яку крива міняє свою опуклість вниз на опуклість вгору або навпаки* (мал. 23)

Теорема. *Якщо для функції y = f (x) друга похідна її $f''(x)$ в деякій точці x_0 обертається в нуль і при переході через цю точку змінює знак на обернений, то точка M (x, f(x)) є точкою перегину* *графіка функції.*

Зауваження. У точці перегину x_0 функції y = f (x) друга похідна може також не існувати; наприклад, обертається в нескінченність.

10.6. Пошук екстремума функції за допомогою другої похідної

Якщо функція y=f(x) у стаціонарній точці має другу похідну, що у цій точці відмінна від нуля, то нею можна скористатися при знаходженні екстремума функції.

Припустимо, що в стаціонарній точці функція має другу похідну, відмінну від нуля. Покажемо, що в цьому випадку функція в стаціонарній точці має екстремум.

Розглянемо два випадки:

1) $f''(c) \rangle 0$, те $f''(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(c+\Delta x)}{\Delta x}$. З нерівності випливає, що якщо $\Delta x<0$, те $f'(c+\Delta x) \langle 0$, якщо ж $\Delta x>0$, те $f'(c+\Delta x) \rangle 0$. Інакше кажучи, у деякому околі точки з ліворуч від точки c похідна функції від'ємна, а праворуч додатня. А це означає, що в стаціонарній точці функція має мінімум.

2) $f''(c) \langle 0$. Міркуючи так само, як й у випадку 1, переконаємося, що в стаціонарній точці c функція має максимум.

У результаті ми одержимо друге правило для знаходження екстремума функції в стаціонарній точці.

Щоб дізнатися, чи є екстремум у стаціонарній точці x = c, потрібно знайти другу похідну функції й обчислити її значення в цій стаціонарній точці. Якщо $f''(c) \neq 0$, то f (c) є екстремум функції. Причому це максимум, якщо $f''(c) \langle 0$, і мінімум, якщо $f''(c) \rangle 0$. f'' - це точка перегину функції.

10.7. Побудова графіка функції за допомогою похідної

При побудові графіка функції необхідно провести дослідження функції.

10.8. Дослідження функцій і побудова графіків

10.8.1. Ознака монотонності функції

Функція f(x) не спадає (не зростає) на проміжку X, якщо для будь-яких x_1, $x_2 \in X$ з умови $x_1<x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$).

Якщо для тих же x з умови $x_1< x_2$ випливає нерівність f(x_1<f(x_2) (f(x_1 > f(x_2)), то функція f(x) називається зростаючою (спадною) на проміжку X.

Теорема 1. *Якщо функція f (x) диференційовна на (a, b) і f(x)≥ 0 (f'(x)≤ 0) на (a,b), то функція f(x) не спадає (не зростає) на (a, b).*

10.8.2. Знаходження точок локального екстремума функції

Точка x_0 називається *точкою строгого локального максимуму (мінімуму)* функції *f(x),* якщо для всіх *x* з якогось δ-околу точки x_0 виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$) при $x \neq x_0$.

Локальний максимум (max) і локальний мінімум (min) поєднуються загальною назвою *локальний екстремум.*

Теорема 2 *(необхідна умова локального екстремума).*

Якщо функція f(x) має в точці x_0 локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то f´ (x_0)=0.

Точки, у яких похідна функції дорівнює нулю, прийнято називати *точками можливого екстремума.*

Теорема 3 *(достатня умова локального екстремума).*

Нехай функція f(x) диференційовна в якомусь δ-околі точки x_0. Тоді якщо f''(x) при переході через точку x_0 змінює знак з «+» на «–», то x_0 — точка локального максимуму, якщо f '(x) у точці x_0 змінює знак з «–» на «+», то x_0 — точка *локального мінімуму, якщо ж знак f ’(x) у точці x_0 не змінюється, то в точці x_0 екстремума не існує.*

10.8.3. Напрямок опуклості й точки перегину графіка функції

Графік функції *f(x)* має на інтервалі *(a, b)* опуклість, спрямовану *вниз (нагору),* якщо в межах інтервалу *(a, b)* графік лежить *не нижче (не вище)* будь-якій дотичною до графіка функції на (a, b).

Теорема 4. *Якщо функція f(x) має на інтервалі (a, b) другу похідну і* $f''(x) \geq 0$ *($f''(x) \leq 0$)* у *всіх точках (a, b), то графік функції має на (a, b) опуклість, спрямовану вниз (нагору).*

Точка *M(x_0; f(x_0))* називається *точкою перегину* графіка функції *f(x),* якщо в точці *M* графік має дотичну й існує такий окіл точки x_0, у межах якої графік функції ліворуч і праворуч від точки x_0 має різні напрямки опуклості.

Теорема 5 *(необхідна умова точки перегину). Нехай графік функції f(x) має перегин у точці M (x_0; f(x_0)) і нехай функція має в точці x_0 неперервну другу похідну. Тоді* $f''(x)$ *у точці x_0 обертається в нуль, тобто* $f''(x_0)=0$.

Точки *M(x_0; f(x_0))* графіка, для яких $f''(x_0)=0$, називаються *критичними.*

Теорема 6 *(достатня умова точки перегину). Нехай функція f(x) має другу похідну в деякому околі точки x_0. Тоді якщо в межах зазначеного околу f”(x) має різні знаки ліворуч і праворуч від точки x_0, то графік функції має перегин у точці M(x_0; f(x_0)).*

10.8.4. Асимптоти графіка функції

Пряма лінія називається *асимптотой* графіка функції *f(x),* якщо відстань від точки *M,* що лежить на графіку, до цієї прямої прямує до нуля при пересуванні точки за графіком у нескінченність.

Існує три види асимптот: *вертикальні, горизонтальні* й *похилі.*

Пряма $x = x_0$ називається *вертикальною асимптотою* графіка функції *f(x),* якщо хоча б одне із граничних значень $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ дорівнює $+\infty$ або $-\infty$.

Пряма *y = A* називається *горизонтальною асимптотою* графіка функції *f(x)* при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, якщо $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} f(x) = A$.

Пряма $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ *називається похилою асимптотою* графіка функції *f(x)* при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, якщо функцію *f(x)* можна представити у вигляді $f(x)=k(x)+b+a(x)$, де $a(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

Теорема 7. *Для того щоб графік функції f(x) мав при* $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ *похилу асимптоту y=kx+b, необхідно й достатньо, щоб існували дві границі:*

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x} = k \quad i \lim_{x\to+\infty(-\infty)} \left[f(x) - kx\right] = b.$$

10.8.5. Схема дослідження графіка функції

1) знайти область визначення функції;
2) знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
3) знайти асимптоти;
4) знайти точки можливого екстремума;
5) знайти критичні точки;
6) за допомогою допоміжного малюнка досліджувати знак першої й другої похідних. Визначити ділянки зростання й спадання функції, знайти напрямок опуклості графіка, точки екстремума й точки перегину;
7) побудувати графік.

11. ІНТЕГРУВАННЯ

11.1. Первісна й невизначений інтеграл

11.1.1. Основні відомості

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку X, якщо для кожного $x \in X$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад. Функція $F(x) = \sin x$ є первісною для функції $f(x) = \cos x$ на $X = (-\infty, +\infty)$, тому що при будь-якому x: $(\sin x)' = \cos x$.

Якщо $F(x)$ — первісна для $f(x)$, то функція $F(x) + C$, де C — деяка постійна, також є первісною для функції $f(x)$, тому що $[F(x) + C]' = f(x)$ для будь-якого числа C. Наприклад, для $f(x) = \cos x$ первісної є не тільки $\sin x$, але й функція $\sin x + C$, тому що $(\sin x + C)' = \cos x$.

Означення. *Якщо функція $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$, то множина функцій $F(x) + C$, де C — довільна постійна, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ й позначається символом*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

При цьому функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією,* $f(x)dx$ — *підінтегральним виразом,* а змінна x — *змінною інтегрування.*

Відновлення функції за її похідною, або ж знаходження невизначеного інтеграла, називається *інтегруванням.* Інтегрування – операція, обернена диференціюванню.

11.1.2. Основні властивості невизначеного інтеграла

$1°.\ \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$

$2°.\ d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$

$3°\ \int dF(x) = F(x) + C.$

$4°\ \int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$

$5°\ \int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

11.2. Основні методи інтегрування

Безпосереднє інтегрування. Обчислення інтегралів за допомогою таблиці найпростіших інтегралів й основних властивостей невизначених інтегралів називається *безпосереднім інтегруванням.*

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int 0dx = C$;

2. $\int dx = x + C$;

3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$;

4. $\int \dfrac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$;

5. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C_1, \quad a \neq 0$;

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C = -\arccos \frac{x}{|a|} + C_1, \quad a \neq 0$;

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$; $\qquad \int e^x dx = e^x + C$;

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

12. $\int shxdx = chx + C$;

13. $\int chxdx = shx + C$;

14. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$;

15. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$;

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C, \quad a \neq 0$;

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C, \quad a \neq 0$;

18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$;

19. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0$;

20. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0$.

Метод підстановки. *Метод підстановки (або заміни змінної)* полягає в тому, що заміняють x на $\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - неперервно диференційовна функція, $dx = \varphi'(t)\,dt$:

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

При цьому одержують шукану функцію, виражену через змінну t. Для повернення до змінного x необхідно замінити t значенням $t = \psi(x)$, яке перебуває зі співвідношення $x = \varphi(t)$.

Зазначену формулу застосовують також й у оберненому напрямку:

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\psi(x)} = \int f(x)\,dx,$$

де $t=\psi(x)$ — функція, зворотна функції $x=\varphi(t)$.

Метод інтегрування частинами. *Формулою інтегрування частинами у невизначеному інтегралі* називається формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

де u й v — диференцфійовні функції по x. Вона дозволяє звести обчислення $\int u\,dv$ до обчислення інтеграла $\int v\,du$, що може виявитися більш простим для інтегрування.

Більшу частину інтегралів, що обчислюють інтегруванням частинами, можна розбити на три групи:

1) Інтеграли виду $\int P(x) arctg\, x\, dx$, $\int P(x) arcctg\, x\, dx$, $\int P(x)\, ln\, x\, dx$, $\int P(x) arcsin\, x\, dx$, $\int P(x) arccos\, x\, dx$, де $P(x)$ — многочлен. Для їхнього обчислення треба покласти u рівним одній із зазначених вище функцій.

2) Інтеграли виду $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x) sinkxdx$, $\int P(x) coskxdx$, де $P(x)$ — многочлен, а k — деяке число. Для їхнього обчислення варто покласти $u = P(x)$.

3) Інтеграли $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, де a й b — деякі числа. Ці інтеграли обчислюються дворазовим інтегруванням частинами.

Обчислимо інтеграл $\mathrm{I}_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$ (n – ціле додатне число).

При $n=1$ маємо $\mathrm{I}_1 = arctg\,x + C.$ Нехай $n>1$. Тоді

$$\mathrm{I}_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} = \int \frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\left(x^2+1\right)^n}dx = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} - \int \frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)^n}.$$

Формули типу

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n} = \frac{x}{(2n-2)\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} \quad (n > 1).$$

називаються *рекурентними.* Вони дозволяють звести обчислення інтеграла I_n до обчислення інтеграла I_{n-1} з індексом, меншим на одиницю, а у свою чергу, обчислення I_{n-1}— до обчислення I_{n-2} і т.д. У результаті прийдемо до відомого інтеграла I_1 й буде обчислений інтеграл I_n.

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{x}{4\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{8\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{8} arctg\,x + C.$$

11.3. Інтегрування раціональних функцій

Якщо знаменник Θ правильного раціонального дробу $\frac{\mathrm{P}(x)}{\theta(x)}$ (має степінь многочлена в чисельнику менше степеня многочлена в знаменнику) може бути представлений у вигляді

$$\theta(x) = A(x-\alpha)^r (x-\beta)^s \mathrm{K} \left(x^2+2px+q\right)^t \left(x^2+2ux+v\right)^\eta \mathrm{K},$$

де A — коефіцієнт при старшому ступені многочлена $\theta(x)$, α, β... — корінь рівняння $\theta(x)=0$, а тричлени не мають дійсних коренів, то цей дріб розкладається на суму елементарних дробів у такий спосіб:

$$\frac{P(x)}{\theta(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha)}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+K+\frac{A_r}{(x-\alpha)^r}+K$$

$$K+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+2px+q\right)^2}+K+\frac{M_tx+N_t}{\left(x^2+2px+q\right)^t}+K \quad ,$$

де A_1, A_2, ..., A_r, ... ,M_1, N_1, M_2, N_2, ..., M_t, N_t, ... — деякі числа, що підлягають визначенню. Для їхнього визначення множать обидві частини останнього розкладання на θ(x). Тому що рівність між многочленом P (x) і многочленом, що вийде в правій частині, справедливо для всіх x, то коефіцієнти, що розташовані при рівних степенях x, рівні між собою. У такий спосіб одержимо ряд рівнянь першого степеня, з яких знайдемо невідомі числа $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_t, N_t, \ldots$

Викладений метод пошуку розкладання раціональної функції називається *методом невизначених коефіцієнтів.*

Якщо раціональний дріб $\dfrac{P(x)}{\theta(x)}$ неправильний, то варто виділити цілу частину.

11.4. Визначений інтеграл

11.4.1. Означення визначеного інтеграла

Нехай функція *f (x)* визначена на відрізку [a, b]*, a < b.* Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{i-1} < x_i <\ldots< x_n = b$. У кожному з одержаних часткових відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ виберемо довільну точку $\xi_i\left(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i\right)$ й складемо суму

$$\sigma=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+K+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad \text{де } \Delta x_i=x_i-x_{i-1}.$$

Ця сума називається *інтегральною сумою* для функції *f(x)* на [a, b].

Позначимо через λ довжину найбільшого часткового відрізка розбивки:

$$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}.$$

Означення. *Якщо існує кінцева границя* I *інтегральної суми* σ *при* $\lambda\to 0$**,** *то ця межа називається визначеним інтегралом від функції f(x) по відрізку [a, b] і позначається:*

$$I=\int_a^b f(x)dx \text{ или } \int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

У цьому випадку функція *f(x)* називається *інтегровною на* [a, b]. Числа a й b називаються відповідно *нижньою* й *верхньою границею інтегрування, f(x)* — *підінтегральною функцією,* x — *змінною інтегрування.*

Для інтегрування функції досить її неперервності на відрізку [a, b].

11.4.2. Основні властивості визначеного інтеграла

1. За означенням: $\int_b^a f(x)dx=0.$
2. За означенням: $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$
3. Які б не були числа a, b, c, завжди має місце рівність: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$
4. Постійний множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

5. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі їхніх інтегралів, тобто

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

11.4.3. Формула Ньютона-Лейбніця

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і функція $F(x)$ є деякою її первісною на цьому відрізку, то має місце *формула Ньютона-Лейбніця*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

11.5. Деякі фізичні й геометричні додатки визначеного інтеграла

11.5.1. Формули площ плоских фігур

$$S = \int_a^b f(x)dx,$$

де S — площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x)$, відрізком $[a,b]$ на осі Ox і прямими $x = a, x = b, a < b$.

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx,$$

де S — площа фігури, розташованої між графіками функцій $f_2(x)$ і $f_1(x)$, прямими $x=a$, $x = b$, $f_2(x) \geq f_1(x)$, $a < b$.

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt,$$

де S — площа криволінійної трапеції, верхня границя якої задана параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$.

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta p^2(\varphi)d\varphi,$$

де S — площа криволінійного сектора, обмеженого кривою, заданою в полярних координатах рівнянням $p = p(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, і двома полярними радіусами, що становлять із полярною віссю кути α і β.

11.5.2. Формули довжин дуг плоских кривих

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)dx},$$

де L – довжина кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt,$$

де L - довжина кривої, заданої параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$.

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{p(\varphi) + p'^2(\varphi)}\,d\varphi,$$

де L — довжина кривої, заданої в полярних координатах рівнянням $p = p(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$.

11.5.3. Формули об'ємів тіл обертання

$$V = \pi \int_c^d y^2(x)dy,$$

де V — об'єм тіла, одержаного обертанням криволінійної трапеції $0 \le y \le f(x)$, $a \le x \le b$ навколо вісі *Ох*. Диференціал змінного об'єму $dV = \pi y^2 dx$.

$$V = \pi \int_c^d x^2(y)dy,$$

де V — об'єм тіла, одержаного обертанням криволінійної трапеції $0 \le x \le \varphi(y)$, $c \le y \le d$ навколо вісі *Оу*. Диференціал змінного об'єму $dV = \pi x^2 dy$.

Приклад. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ навколо вісі *Ох*.

Розв'язання. Тому що еліпс симетричний щодо вісей координат, то досить знайти половину шуканого об'єму. За формулою маємо

$$\frac{1}{2}V = \pi \int_0^a y^2(x)dx = \pi \int_0^a b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi b^2 \int_0^a dx - \frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^a x^2 dx =$$

$$= \left(\pi b^2 x - \frac{\pi b^2 x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a = \pi b^2 - \frac{\pi b^2 a^3}{3a^2} = \frac{2}{3}\pi ab^2.$$

Отже, $\frac{1}{2}V = \frac{2}{3}\pi ab^2$, звідки $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$. Якщо *a* = *b* = *R*, то еліпс є колом. Тоді об'єм тіла обертання кола навколо вісі *Ох* є куля, об'єм якої $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

11.5.4. Формули площ поверхонь обертання

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx,$$

де S – площа поверхні, утвореної обертанням кривої, заданої рівнянням $y = f(x), a \le x \le b,$ навколо вісі *Ох*.

$$S = 2\pi \int_c^d \varphi(y)\sqrt{1 + \varphi'^2(y)}\,dy,$$

де S - площа поверхні, утвореної обертанням кривої, заданої рівнянням $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, навколо вісі *Оу*.

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt,$$

де S — площа поверхні, утвореної обертанням кривої, заданої параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$.

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta p \sin\varphi \sqrt{p^2 + p'^2}\,d\varphi,$$

де S — площа поверхні, утвореної обертанням кривої, заданої рівнянням у полярних координатах $p = p(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$.

11.5.5. Формула роботи змінної сили

$$A = \int_a^b F(x)dx,$$

де A - робота змінної сили F(x) на відрізку [a, b].

Приклад. Визначити роботу A, яку необхідно затратити, щоб викачати воду із прямого кругового циліндра. Радіус підстави циліндра R, висота h.

Розв'язання. Робота, яку необхідно затратити, щоб підняти тіло, дорівнює добутку ваги тіла на висоту підйому. Уведемо систему координат так, як показано на рис. 24. Розіб'ємо об'єм циліндра площинами, паралельними підставі, відстань між якими дорівнює dx. Тоді циліндр розіб'ється на окремі елементарні циліндри. Тому що мова йде про воду, питома вага якої дорівнює одиниці, то вага циліндричного шару води чисельно дорівнює його об'єму. Тому вага елементарного циліндра дорівнює його об'єму d = πR^2 dx.

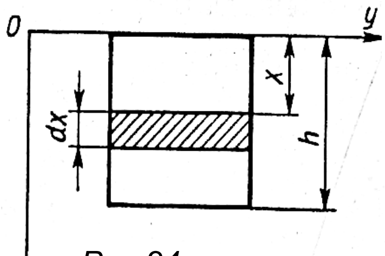


Рис.24

Тому що сила, яку треба прикласти до цього елементарного циліндра для підняття його, дорівнює його ваги, то робота, що робить ця сила, дорівнює $dA = x\pi R^2 dx$.

Інтегруючи, одержимо всю роботу:

$$A = \pi R^2 \int_0^h x\,dx = \frac{\pi R^2 h^2}{2}.$$

Зрозуміло, дану задачу можна розв'язати й іншим способом: спочатку знайти наближене значення шуканої величини у вигляді інтегральної суми, а потім граничним переходом одержати точне значення у вигляді інтеграла.

11.6. Невласні інтеграли з нескінченними границями інтегрування

11.6.1. Основні поняття

Означення. *Невласними інтегралами першого роду називаються інтеграли виду:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^b f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^c f(x)dx + \lim_{R\to+\infty}\int_c^R f(x)dx,$$

де *c* — будь-яке число.

Якщо наведені границі існують і кінцеві, то відповідні інтеграли у цьому випадку називають *збіжними.* Якщо наведені границі не існують або дорівнюють нескінченості, то відповідні інтеграли у цьому випадку називають *розбіжними.*

11.6.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій

Якщо функція *f (x)* визначена на проміжку [a, b), інтегровна на будь-якому відрізку [a, b - ε], який міститься в [a, b), і не обмежена ліворуч від точки b (її називають *особливою),* то, за означенням,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to 0+}\int_a^{b-a} f(x)dx.$$

Якщо ця границя існує й кінцева, то його називають *невласним інтегралом другого роду,* а інтеграл називається *збіжним.* У іншому випадку — *розбіжним.*

Аналогічно, якщо $x = a$ – особлива точка, то, за означенням,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Якщо внутрішня точка відрізка $[a, b]$ -точка $x = c$ - особлива, то, за означенням,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Якщо a й b - особливі точки, то невласний інтеграл визначається як сума:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

де c - будь-яка точка з (a, b).

11.6.3. Ознака збіжності невласних інтегралів

Теорема (ознака порівняння невласних інтегралів).

Якщо функції f(x) і g(x) неперервні на проміжку [a, + ∞) і задовольняють на ньому умові $0 \le f(x) \le g(x)$ *, то зі збіжності інтеграла* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *випливає збіжність інтеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$*, а з розбіжності інтеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *випливає розбіжність інтеграла* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Аналогічна ознака порівняння має місце для невласних інтегралів другого роду.

12. РЯДИ

12.1. Поняття числового ряду

12.1.1. Основні означення

Нехай дана числова послідовність $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ Вираз виду

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (12.1)$$

називається *числовим рядом* або просто *рядом.*

Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ називаються *членами ряду,* член a_n — *загальним членом ряду.*

Суми кінцевого числа членів ряду

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots$$

називаються *частковими сумами ряду* (12.1). Число членів ряду нескінченно, тому часткові суми ряду утворять нескінченну послідовність часткових сум

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots \qquad (12.2)$$

Ряд (12.1) називається *збіжним,* якщо послідовність його часткових сум (12.2) збігається до якого-небудь числа S, що називається *сумою ряду* (12.1). Символічно це записується так:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad \text{або} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Якщо ж послідовність часткових сум (12.2) розбігається, то ряд (12.1) називається *розбіжним.*

12.1.2. Необхідна умова збіжності ряду

Теорема. *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається, то його загальний член прямує до нуля,* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Приклад. Довести, що ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$ який називається *гармонійним рядом,* розбігається.

Розв'язання. Тому що $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, то для гармонійного ряду необхідна умова збіжності виконана. Доведемо, що цей ряд розбігається. Дійсно, якби цей ряд збігався то, позначаючи його суму через $S,$ ми б мали

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} - S_n\right) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0.$$

Але $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$

тобто $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}.$ Звідси випливає, що рівність $\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} - S_n\right) = 0$ неможлива, тобто гармонійний ряд розбігається.

Таким чином, умова $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ є *необхідною,* але не достатньою умовою збіжності ряду.

Якщо ж для деякого ряду його загальний член не прямує до нуля, то теорема дозволяє відразу сказати, що такий розбігається.

12.2. Ряди з невід'ємними членами. Ознаки збіжності

Ознака порівняння.

Теорема 1. *Нехай дані два ряди з невід'ємними членами* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *й* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *і для всіх n виконується нерівність* $a_n \le b_n$*. Тоді зі збіжності ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *випливає збіжність ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, а з розбіжності ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *випливає розбіжність ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *.*

Порівнянням з гармонійним рядом або зі спадною прогресією, досліджують збіжність ряду.

Ознака Даламбера.

Теорема 2. *Нехай даний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *з додатними членами й існує границя* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = p.$ *Тоді: а) при p < 1 ряд збігається; б) при p >1 ряд розбігається.*

Зауваження. При *p =1,* як показують приклади, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ може як збігатися, так і розбігатися. У цьому випадку необхідно додаткове дослідження ряду за допомогою ознаки порівняння або інших ознак.

Інтегральна ознака.

Теорема 3. *Нехай даний ряд* $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, *члени якого є значеннями деякої функції f(x), додатної, неперервної й спадної на напівінтервалі* [1,+ ∞). *Тоді якщо* $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ *збігається, то збігається й ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$*; якщо ж* $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ *розбігається, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *також розбігається.*

12.3. Знакозмінні ряди

12.3.1. Знакопочережні ряди

Теорема 1. (*Ознака Лейбніця).*

Якщо абсолютні величини членів знакопочережного ряду

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \quad (a_n>0)$$

монотонно спадають: $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ *— і загальний член ряду прямує до нуля:* $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ *—, то ряд збігається.*

12.3.2. Абсолютна й умовна збіжності рядів

Ряд зі членами довільних знаків називається знакозмінним.

Візьмемо який-небудь знакозмінний ряд

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{12.3}$$

де числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ можуть бути як додатними, так і від'ємними, причому їхнє розташування в ряду довільне. Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин членів ряду (12.3):

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|. \tag{12.4}$$

Теорема 2. *Якщо ряд* (12.4) *збігається, то збігається й ряд* (12.3). *Ряд* (12.3) *у цьому випадку називається абсолютно збіжним.*

Якщо ряд (12.3) *збігається, а ряд* (12.4) *розбігається, то ряд* (12.3) *називається умовно збіжним.*

12.4. Степеневі ряди

12.4.1. Означення й загальні зауваження. Інтервал збіжності

Ряд виду:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \tag{12.5}$$

називається *степеневим рядом.*

Числа $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ називаються *коефіцієнтами степеневого ряду.*

Надаючи x різні числові значення, будемо одержувати різні числові ряди, які можуть виявитися збіжними або розбіжними. Множина тих значенні x, при яких ряд (12.5) збігається, називається *областю його збіжності.*

Очевидно, що часткова сума статечного ряду $S_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ є функцією змінної x. Тому й сума ряду S також є деякою функцією змінної x, визначеної в області збіжності ряду:

$$S=S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \left(\text{або } f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\right).$$

Число R називається *радіусом збіжності ряду* (12.5), якщо при |x| < R ряд збігається, а при |x| > R — розбігається. Інтервал (- R, R) у цьому випадку називається *інтервалом збіжності ряду* (12.5). Якщо ряд (12.5) збігається на всій числовій прямій, то пишуть R = ∞; якщо він збігається тільки при x = 0, то пишуть R=0.

При x = ± R ряд (12.5) може або збігатися, або розбігатися. Це питання вирішується для кожного конкретного ряду.

Радіус збіжності можна знайти по формулі $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, якщо відповідна границя існує.

12.4.2. Розкладання функцій у степеневі ряди

Якщо функція f (x) на інтервалі (-R, R) розкладається в степеневий ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \qquad (12.6)$$

то коефіцієнти цього ряду визначаються по формулах

$$a_0 = f(0),\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Підставляючи вираження коефіцієнтів у рівність (2), одержуємо

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{/}(0)}{1!}x + \frac{f^{//}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots. \qquad (12.7)$$

Ряд, що стоїть в правій частині формули (3), називається *ряд Маклорена* для функції *f (x).*

При розкладанні функцій у степеневі ряди часто використовують формули Маклорена для основних функцій.

12.4.3. Формули Маклорена для основних елементарних функцій

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n), \qquad x \to 0;$$

1. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \qquad x \to 0;$

2. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \qquad x \to 0;$

3. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \qquad x \to 0;$

4. $shx = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \qquad x \to 0;$

5. $chx = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \qquad x \to 0;$

6. $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}x^k + o(x^n), \qquad x \to 0;$

6.1. $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n); \qquad \frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n), \qquad x \to 0;$

7. $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n), \qquad x \to 0;$

7.1. $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right), \qquad x \to 0;$

8. $arctgx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right), \qquad x \to 0;$

9. $\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right), \qquad x \to 0.$

Якщо $f(x)$ - парна функція, то: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o\left(x^{2n+1}\right),$

если $f(x)$ - непарна функція, то: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right), \quad x \to 0.$

12.5. Ряди Фур'є

12.5.1. Основні поняття

Означення . *Ряд Фур'є функції $f(x)$, визначеної й інтегровної на відрізку $[-\pi, \pi]$, називається ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{12.8}$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \; a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(x) \cos nx\, dx, \; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Якщо ряд (12.8) є ряд Фур'є функції $f(x)$, то пишуть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right).$$

Якщо $f(x) = f(-x)$, тобто $f(x)$ — функція парна, то $b_n = 0$ й

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\, dx.$$

Якщо $f(x) = -f(-x)$, тобто $f(x)$ — функція непарна, то $a_n = 0$ й

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\, dx.$$

12.5.2. Ряд Фур'є з періодом 2 *l*

Теорема. *Якщо функція $f(x)$ і її похідна $f'(x)$ — неперервні функції на відрізку $[-l, l]$ (l — довільне додатне число) або ж мають на ньому кінцеве число точок розриву I роду, то у всіх точках $x \in (-l, l)$, у яких $f(x)$ неперервна, сума ряду дорівнює $f(x)$ й справедливо розкладання*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi\, x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi\, x}{l}\right),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

а в кожній точці x_0 *розриву функції сума ряду дорівнює* $\left(f(x-)+f(x_0+)\right)/2$ *й на кінцях відрізка сума ряду дорівнює* $\left(f(-l)+f(l)\right)/2.$

Надалі передбачається, що розглянуті функції задовольняють умовам цієї теореми.

Точкою розриву є точка $x=0.$ На підставі теореми в ній сума ряду дорівнює $\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}=\frac{f(0-)+f(0+)}{2}=\frac{`1+(-1)}{2}=0$ й на кінцях відрізка сума ряду дорівнює $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0,$ тобто сума ряду не збігається зі значеннями функції $f(x)$.

Отже, крім точки $x=0$ одержаний ряд збігається до функції $f(x)$ у всіх точках $x\in(-\pi,\pi),$ у яких $f(x)$ неперервна.

Зауваження. Зверніть увагу на те, що функція непарна, тому всі коефіцієнти її $a_n=0$ і їх можна було не обчислювати.

13. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

13.1. Основні поняття

Введення комплексних чисел викликане тим, що в множині дійсних чисел не виконується добування кореня парного степеня з від'ємного числа.

Означення. *Комплексним числом* z *називається впорядкована пара дійсних чисел* $(x;y)$, *тобто при* $z=(x;y)$. *цьому х називається дійсною, а у — уявною частиною комплексного числа.*

Комплексне число *z = (x; y)* зображується на площині *Oxy* точкою з координатами (x; y). Площина *Oxy* в цьому випадку називається *умовно комплексною площиною.*

Комплексне число (x; y) при y ≠ 0 називається *уявним.* Уявне число (0; y) називається *чисто уявним,* а чисто уявне число (0; 1) — *уявною одиницею й* позначається буквою *i*, тобто *i* = (0; 1). За визначенням вважають (x; 0) = *x,* (0; y) =*iy*, (0; 0) = 0.

13.2. Дії над комплексними числами

Нехай $z_1=(x_1;y_1)$ і $z_2=(x_2;y_2)$ — два комплексних числа.
Тоді *сумою* комплексних чисел z_1 й z_2 називається комплексне число

$$z=(x_1+x_2;y_1+y_2);$$

різницею — комплексне число

$$z=(x_1-x_2;y_1-y_2);$$

добутком — комплексне число

$$z=(x_1x_2-y_1y_2;x_1y_2+x_2y_1);$$

часткою — комплексне число

$$z=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2};\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right),\ z_2\neq 0.$$

13.3. Алгебраїчна форма комплексного числа

Будь-яке комплексне число $z = (x; y)$ можна представити у вигляді

$$z = (x;\, y) = (x;\, 0) + (0;\, y) = (x;\, 0) + (y;\, 0)(0;\, 1) = x + iy$$

і виконувати над комплексними числами дії за звичайними правилами алгебри многочленів. Запис $z = x + iy$ називається *алгебраїчною формою комплексного числа.*

Приклад. Знайти суму чисел $z_1 = 2 + i$ *и* $z_2 = 3 - 2i.$

Розв'язання. Маємо

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (3 - i2) = (2 + 3) + i(1 - 2) = 5 - i.$$

Приклад. Розділити число $z_1 = 2 + i3$ на число $z_2 = 1 + i4$.

Розв'язання. Практично ділення комплексних чисел виконується за наступним правилом:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i3}{1 + i4} = \frac{(2 + i3)(1 - i4)}{(1 + i4)(1 - i4)} = \frac{14 - i5}{17} = \frac{14}{17} - i\frac{5}{17}.$$

Комплексне число $\bar{z} = (x; -y) = x - iy$ називається *комплексно-спряженим до* числа $z = (x; y) = x + iy$ й зображується на комплексній площині точкою, симетричною до точки z відносно вісі *Ox.*

13.4. Тригонометрична форма комплексного числа

Комплексне число $z = x + iy$ визначається впорядкованою парою дійсних чисел $(x;\ y)$. За формулами $x = p\cos\varphi$, $y = p\sin\varphi$, що зв'язує полярні й прямокутні координати, одержимо тригонометричну форму запису комплексного числа $z = x+iy$:

$$z = p(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Число *p* називається *модулем,* а число *φ* — *аргументом* комплексного числа *z.* Вони позначаються так: *p* = | *z* |, *φ* = arg *z,* причому аргумент *φ* визначений з точністю до 2*πn* (*n* = 0, ± 1, ±2,...), а модуль має значення $p = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Нехай $z_1 = p_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *и* $z_2 = p_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тоді множення й ділення комплексних чисел z_1 й z_2 визначаються за формулами:

$$z_1 \cdot z_2 = p_1 p_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)];$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{p_1}{p_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Нехай $z = p(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тоді піднесення до степеня і добування кореня *n* - ого степеня (*n* — ціле додатне число) здійснюється за формулою:

$$z^n = p^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

13.5. Границя послідовності комплексних чисел

Нехай дана послідовність комплексних чисел

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots,$$

де $z_n = x_n + iy_n$ (*n* = 1, 2, 3, ...).

Комплексне число $a = x_0 + iy_0$ називається *межею послідовності* $\{z_n\}$*,* якщо для будь-якого ε > 0 існує номер *N,* такий, що при *n* > *N* виконується нерівність $|z_n - a| < \varepsilon$**.** Послідовність $\{z_n\}$ у цьому випадку називається *збіжною до числа а*, що записується у вигляді $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ або $z_n \to a$ при $n \to \infty$.

Необхідною й достатньою умовою збіжності послідовності $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ є збіжність послідовностей дійсних чисел {xn} й {yn}, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

13.6. Числові ряди з комплексними членами

Ряд виду

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \tag{13.1}$$

де $z_n = x_n + iy_n$, називається *числовим рядом з комплексними членами.*

Необхідною й достатньою умовою збіжності ряду (13.1) є збіжність рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ й $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Ряд (13.1) збігається, якщо збігається ряд, складений з модулів його членів, тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$. У цьому випадку ряд (13.1) називається *абсолютно збіжним.*

13.7. Степеневі ряди з комплексними членами

Ряд виду

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{13.2}$$

де z — комплексна змінна; a_n — комплексні числа, називається *степеневим рядом.*

Радіус *R* збіжності степеневого ряду (13.2) визначається за формулою $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$. Якщо ряд збігається тільки в точці *z* = 0, то вважають *R* = 0, якщо ж ряд збігається при будь-якому значенні *z*, тобто на всій комплексній площині, то вважають *R* = ∞.

Приклад. Знайти радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

Розв'язання. Тому що $a_n = \frac{1}{n}, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, то

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Отже, ряд збігається, коли |z| < 1, тобто в колі радіуса *R* = 1 із центром у початку координат.

14. ПОНЯТТЯ, ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

14.1. Поняття функції декількох змінних й основні відомості

Означення. *Нехай X, Y й Z — деякі числові множини. Функцією двох змінних називається множина f упорядкованих трійок чисел (x; y; z), таких, що x належить X, y належить Y, z належить Z і кожна впорядкована пара чисел (x; y) входить в одну й тільки одну трійку цієї множини, а кожне z входить принаймні в одну трійку. При цьому говорять, що впорядкованій парі чисел (x; y) поставлено у відповідність число z, і пишуть z =f (x; y). Число z називається значенням функції f у точці (x; y).*

Змінну z називають залежною змінної, а змінні x и y — незалежними змінними (або аргументами); множина {(x; y) } — областю визначення функції, а множина Z

— *множиною значень функції.*

Тому що кожній упорядкованій парі чисел *(x; y)* при фіксованій прямокутній системі координат відповідає єдина точка *M* площини і, обернено, кожній точці *M* відповідає єдина впорядкована пара чисел *(x; y)*, то функцію двох змінних можна розглядати як функцію точки *M* і замість $z = f(x; y)$ писати $z = f(M)$. Областю визначення функції в цьому випадку є деяка множина *{M}* точок площини.

Приклади: функції двох змінних:

1. $z = x^2 + y^2$. Область визначення цієї функції — множина *{M}* всіх пар чисел *(x; y)*, тобто вся площина *Oxy,* а множина значень — проміжок $Z=[0, +\infty)$.

1. $z = 1/\sqrt{x^2+y^2-1}$. Областю визначення даної функції є множина всіх точок, для яких вираз $1/\sqrt{x^2+y^2-1}$ визначен, тобто множина точок, координати яких задовільняють нерівності $x^2 + y^2 - 1 > 0$ або $x^2 + y^2 > 1$.

Це множина точок, що лежать поза колом радіуса $R = 1$ із центром у початку координат, а множина значень функції являє собою проміжок $Z = (0, +\infty)$.

Аналогічно можна дати визначення функції трьох змінних $u = f(x; y; z)$,чотирьох змінних $u = f(x; y; z; t)$ і взагалі *n* змінних $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$.

Функція двох змінних зображується в просторі у вигляді поверхні, що визначається рівнянням $z = f(x; y)$, тобто сама формула, що задає функцію, і є рівняння цієї поверхні.

Побудова графіків функцій двох змінних у багатьох випадках представляє значні труднощі. Тому існує ще один спосіб зображення функції двох змінних, заснований на перетині поверхонь $z = f(x; y)$ площинами $z = c$, де *c* — будь-яке число, тобто площинами, паралельними до площини *Oxy.*

Назвемо лінією рівня функції $z = f(x; y)$ множину точок *(x; y)* площини *Oxy,* у яких функція приймає те саме значення *c.* Очевидно, при різних *c* виходять різні лінії рівня для даної функції.

14.2. Границя й неперервність функції двох змінних

Нехай функція $z = f(M)$ визначена на деякій множині *{M}* і точка $M_0 \in \{M\}$ або $M_0 \notin \{M\}$, але володіє тією властивістю, що в кожному δ - околі цієї точки міститься хоча б одна точка множини *{M},* відмінна від M_0.

Означення 1. *Число A називається границею функції $z = f(M)$ у точці M_0, якщо для будь-якої збіжної до M_0 послідовності точок $M_1, M_2, ..., M_n, ...$ ($M_n \neq M_0$, $M_n \in \{M\}$) відповідної послідовності значень функції $f(M_1), f(M_2), ..., f(M_n), ...$ збігається до A.*

Позначення: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ *або* $\lim\limits_{\substack{z \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = A.$

Означення 2. *Функція $z = f(M)$ називається неперервною в точці M_0, якщо границя функції в цій точці існує й дорівнює значенню функції в цій точці, тобто*

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0) \text{ або } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0).$$

На функції декількох змінних легко переносяться всі положення теорії границь функції однієї змінної, зокрема справедливі теореми:

$$\lim_{M \to M_0} [f(M) \pm g(M)] = \lim_{M \to M_0} f(M) \pm \lim_{M \to M_0} g(M);$$

$$\lim_{M \to M_0} [f(M) \cdot g(M)] = \lim_{M \to M_0} f(M) \cdot \lim_{M \to M_0} g(M); \quad \lim_{M \to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim\limits_{M \to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M \to M_0} g(M)},$$

якщо $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) \neq 0,$ а також теорема про неперервність суми, добутку й частки неперервних функцій.

15. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

15.1. Частинні похідні

Нехай функція *z = f (M)* визначена в деякому околі точки *M (x; y)*. Надамо змінної *x* у точці *M* довільний приріст Δ*x*, залишаючи значення змінної *y* незмінним. Тоді відповідний приріст функції

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x,\, y) - f(x,\, y)$$

називається *частинним приростом* функції по змінній *x* у точці *M (x;y).*

Аналогічно визначається частинний приріст функції по змінній *y*:

$$\Delta_y z = f(x,\, y+\Delta y) - f(x,\, y).$$

Означення. *Якщо існує границя* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}\left(\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}\right)$, *то вона називається частинною похідною функції z = f (M) у точці M по змінної x (по змінної y) і позначається одним з наступних символів:*

$$z'_x, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}\left(z'_y, f'_y, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

З означення випливає, що частинна похідна функції двох змінних по змінній *x* являє собою звичайну похідну функції однієї змінної *x* при фіксованому значенні змінної *y*. Тому частинні похідні обчислюють за формулами і правилами обчислення похідних функцій однієї змінної.

15.2. Похідні складених функцій

Якщо *z = f (x;* y), x = x (t), y = y (t), то z **=** *f [x (t);* y *(t)]* є складеною функцією від *t.* При цьому

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{15.1}$$

Якщо z = *f (x; y)*, де x = x *(і;* v), y = y *(і;* v), то

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}. \end{cases} \tag{15.2}$$

15.3. Диференціал функції. Похідна за напрямком. Градієнт

Нехай функція *z = f (M)* диференційовна в точці *M,* тобто її повний приріст у цій точці можна представити у вигляді

$$\Delta z = f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y + \alpha(\Delta x;\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x;\Delta y)\Delta y\,, \tag{15.3}$$

де $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ й $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Означення 1. *Диференціалом dz диференційовним у точці M функції z = f (M) називається лінійна щодо приростів* Δ*x й* Δ*y частина повного приросту цієї функції в точці M, тобто*

$$dx = f'_x(x;\, y)\,\Delta x + f'_y(x;\, y)\,\Delta y.$$

Диференціалами незалежних змінних *x* і *y* назвемо приріст цих змінних: *dx*=Δ*x*, *dy*=Δ*y.* Тоді диференціал функції можна записати у вигляді

$$dx = f'_x(x;\, y)\, dx + f'_y(x; y)\, dy.$$

З (15.3) випливає, що $\Delta z \approx dz,$ тобто при досить малих Δ*x* й Δ*y* повний приріст функції приблизно дорівнює її диференціалу.

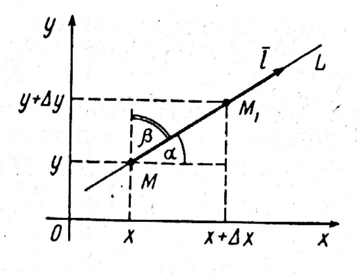


Рис.25

Нехай *z = f (M)* — функція, визначена в деякому околі точи *M (x; y);* $\bar{l} = \{\cos\alpha; \cos\beta\}$- одиничний вектор; *L* — напрямлена пряма, що проходить через точку *M; M*$_1$ (*x*+Δ*x*; *в*+Δ*y)* - точка на прямій *L* (рис. 25); Δ*l* - величина відрізка *MM*$_1$;

Δ*z* = *f* (*x*+Δ*x*, *y*+Δ*y*) – *f* (*x*, *y*) — приріст функції *f (M)* у точці *M* (*x; y*).

Означення 2. *Границя відношення* $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ *при* Δ*l*→0 (*M*$_1$→*M*) *якщо вона існує, називається похідною функції z = f (M) у точці M (x; y) за напрямком вектора* $\bar{l}$ *й позначається* $\frac{\partial z}{\partial l},\ \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial l}.$

Якщо функція *f (M)* диференційовна в точці *M (x; y),* то в точці *M (x; y)* існує похідна по будь-якому напрямку $\bar{l}$, що виходить із *M;* обчислюється вона за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta, \qquad (15.4)$$

де *cos α* і *cos β* — напрямні косинуси вектора $\bar{l}$.

Означення 3. *Градієнтом функції z =f (M) у точці M (x; y) називається вектор, координати якого рівні відповідною частинним похідним* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *й* $\frac{\partial z}{\partial y}$, *взятим у точці M (x; y).*

Позначення:

$$\text{grad } z = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right\}. \qquad (15.5)$$

15.4. Частинні похідні й диференціали вищих порядків

Нехай функція *z = f (M)* має частинні похідні $f_x^{/}(x;y)$ й $f_y^{/}(x;y)$ (вони називаються частинними похідними *першого порядку*) у кожній точці деякого околу точки *M.* Якщо $f_x^{/}(x;y)$ й $f_y^{/}(x;y)$ мають у точці *M* частинні похідні по змінним *x* та *y*, то вони називаються *частинними похідними* другого порядку від функції *f (M)* у цій точці й позначаються наступними символами:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x;y) = f^{(2)}_{x^2}(x;y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f''_{yx}(x;y) = f^{(2)}_{yx}(x;y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x;y) = f^{(2)}_{y^2}(x;y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f''_{xy}(x;y) = f^{(2)}_{xy}(x;y).$$

Частинні похідні другого порядку виду $f''_{yx}(x; y)$, $f''_{xy}(x; y)$ називаються *змішаними* частинними похідними.

Частинні похідні третього порядку визначаються як частинні похідні від частинних похідних другого порядку і т.д.

Диференціал dz називається диференціалом *першого порядку.* Диференціал від диференціала dz називається диференціалом *другого порядку* функції $z = f(M)$ і обчислюється за формулою

$$d^2z = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}dx\,dy + f''_{yy}(dy)^2.$$

Символічно цю рівність можна записати так $d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x; y).$

Аналогічно,

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f(x; y) = f'''_{x^3}(dx)^3 + 3f'''_{x^2y}(dx)^2dy + 3f'''_{xy^2}dx(dy)^2 + f'''_{y^3}(dy)^3$$ і т.д.

15.5. Дотична площина й нормаль до поверхні

Рівняння дотичної площини до поверхні $F(x; y; z) = 0$ у точці $M_0(x_0; в_0; z_0)$ має вигляд

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0. \quad (15.6)$$

Рівняння нормалі до поверхні $F(x, y, z) = 0$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд

$$\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}.$$

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x; y)$, то його можна переписати у вигляді $f(x; y) - z = 0$; тоді маємо $F(x, y, z) = f(x; y) - z$, звідси одержимо $F'_x = f'_x,\ F'_y = f'_y$ й $F'_x = -1.$ Рівняння (15.6) у цьому випадку приймає вид

$$f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

а рівняння нормалі буде мати вигляд

$$\frac{x - x_0}{f'_x} = \frac{y - y_0}{f'_y} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

15.6. Екстремуми функції двох змінних

Необхідні умови екстремума функції $f(x; y)$ у точці M_0 (x_0; $в_0$) полягають у виконанні в цій точці рівностей $f'_x(x_0; y_0) = f'_y(x_0; y_0) = 0$. При цьому функція $f(x; y)$ має в даній точці максимум, якщо $\Delta = f''_{xx}(x_0; y_0) \cdot f''_{yy}(x_0; y_0) - \left[f''_{xy}(x_0; y_0)\right]^2 > 0$ і $f''_{xx}(x_0; y_0) < 0,$ і мінімум, якщо $\Delta > 0$ й $f''_{xx} > 0$ (за умови неперервності часток похідних). Якщо $\Delta < 0$, то в точці M_0 немає екстремума. Якщо $\Delta = 0$, то функція $f(x; y)$ у точці M_0 може мати екстремум, але може й не мати його.

16. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

16.1. Диференціальні рівняння першого порядку

16.1.1. Основні поняття

Означення 1. *Рівняння виду:*

$$F(x, y, y') = 0, \quad (16.1)$$

де x – незалежна змінна, y – шукана функція, y ′ - її похідна, називається *диференціальним рівнянням першого порядку.*

Якщо рівняння (16.1) можна розв'язати відносно y$^{/}$, то воно приймає вид

$$y^{/} = f(x, y) \qquad (16.2)$$

і називається рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної.

Приклади диференціальних рівнянь: $y^{/} = xe^{y}$, $y^{/} = \dfrac{y\ln x}{x}$, $y^{/} = x + y$ і т.д.

Означення 2. *Розв'язанням диференціального рівняння першого порядку називається функція y = φ (x), x $\in$ (a, b), що при підстановці у рівняння обертає його в тотожність.*

Графік розв'язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою.*

Умови

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \qquad (16.3)$$

у силу яких функція *y = φ (x)* приймає задане значення y_0 у заданій точці x_0, називають *початковими умовами розв'язку.*

Означення 3. *Загальним розв'язком рівняння* (16.2) *у деякій області G площини Oxy називається функція y = φ (x, C), що залежить від x і довільної константи C, якщо вона є розв'язком рівняння* (16.2) *при будь-якому значенні константи C і якщо при будь-яких початкових умовах* (16.3) *таких, що* $(x_0; y_0) \in G$, *існує єдине значення константи* $C = C_0$ *таке, що функція* $y = \varphi(x, C_0)$ *задовольняє даним початковим умовам* $\varphi(x_0, C) = y_0$.

Означення 4. *Частинним розв'язком рівняння* (16.2) *в області G називається функція* $y = \varphi(x, C_0)$, *що випливає із загального розв'язку y = φ (x, C) при певному значенні константи* $C = C_0$.

Геометрично загальне розв'язок *y = φ (x, C)* являє собою сімейство інтегральних кривих на площині *Oxy,* що залежить від однієї довільної константи *C,* а частинним розв'язком $y = \varphi(x, C_0)$ — одну інтегральну криву цього сімейства, що проходить через задану точку $(x_0; y_0)$.

16.1.2. Рівняння з відокремленими змінними

Означення 5. *Рівняння виду:*

$$y^{/} = f_1(x) f_2(y), \qquad (16.4)$$

де $f_1(x)$ *і* $f_2(y)$ *— неперервні функції, називається диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.*

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{y}{x}$.

Розв'язання. Дане рівняння виду (4), де $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ і $f_2(x) = y$. Відокремлюючи змінні, одержуємо $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}\left(y^{/} = \dfrac{dy}{dx}\right)$. Інтегруючи, маємо

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0 \quad \text{або} \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1|.$$

Потенціюючи, знаходимо $|y| = |C_1|\,|x|$, що еквівалентно рівнянню $y = \pm C_1 x$. Вважаючи $\pm C_1 = C$, остаточно одержуємо $y = Cx$.

16.1.3. Лінійні рівняння

Означення 6. *Рівняння виду:*

$$y^{/} + p(x) y = f(x), \qquad (16.5)$$

де p (x) і f (x) — неперервні функції, називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Назва рівняння пояснюється тим, що невідомі функції y й їхні похідні y' входять у рівняння лінійно, тобто в першому степені.

Якщо f $(x) \equiv 0$, то рівняння (16.5) називається лінійним однорідним рівнянням. Якщо $f(x) \not\equiv 0$, то рівняння (16.5) називається *лінійним неоднорідним рівнянням.*

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + 3y = e^{2x}$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним. Тут $p(x) = 3; f(x) = e^{2x}$. Розв'язуємо спочатку відповідне однорідне рівняння $y' + 3y = 0$. Відокремлюючи змінні $\frac{dy}{y} = -3\,dx$ й інтегруючи, знаходимо $\ln|y| = -3x + \ln|C_1|$ *або* $y = \pm C_1 e^{-3x} = Ce^{-3x}$.

Загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння будемо шукати в тому ж виді $y = C(x)\, e^{-3x}$, тільки довільну константу будемо вважати вже функцією від x. Тут застосований *метод варіації постійної.* Диференціюючи, маємо $y' = C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x}$. Підставляючи в дане рівняння вираз для y и y', одержуємо

$$C'(x)e^{-3x} = e^{2x},\ C'(x) = e^{5x} \quad \text{або} \quad dC = e^{5x}dx,$$

звідки $C(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C_2$, де C_2 — довільна константа. Отже, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $y = C(x)e^{-3x} = \left(\frac{1}{5}e^{5x} + C_2\right)e^{-3x}$ або $y = \frac{1}{5}e^{2x} + C_2 e^{-3x}$.

Знайдемо тепер загальний розв'язок даного рівняння *методом підстановки.* Покладемо $y = uv$. Тоді будемо мати $y' = u'v + uv'$. Підставляючи ці вирази в дане рівняння, одержимо

$$u'v + uv' + 3uv = e^{2x} \quad \text{або} \quad u'v + u(v' + 3v) = e^{2x}. \qquad (16.6)$$

Тепер будемо вимагати, щоб вираз в дужках дорівнював нулю, тобто щоб $v' + 3v = 0$, звідки $\frac{dv}{3v} = -dx$; $\frac{1}{3}\ln v = -x; \sqrt[3]{v} = e^{-x}; v = e^{-3x}$. Підставляючи знайдене значення v в (16.6), знайдемо $u'e^{-3x} = e^{2x}; du = e^{5x}dx; u = \frac{1}{5}e^{5x} + C$. Але $y = uv$, тому

$$y = e^{-3x}\left(\frac{1}{5}e^{5x} + C\right) \quad \text{або} \quad y = \frac{1}{5}e^{2x} + Ce^{-3x}.$$

16.1.4. Рівняння Бернуллі

Означення 7. *Рівняння виду*

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{n},$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ — неперервні функції, називається рівнянням Бернуллі.

Рівняння Бернуллі розв'язується, так само як і лінійне, підстановкою $y = uv$ або варіацією довільної постійної. Приводиться до лінійного виду підстановкою $z = y^{1-n}$.

16.1.5. Рівняння в повних диференціалах

Означення 8. Рівняння виду

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0, \qquad (16.7)$$

де ліва частина являє собою повний диференціал деякої функції F (x; y) у деякій області G, називається рівнянням у повних диференціалах.

Якщо рівняння (16.7) є рівнянням у повних диференціалах, то його можна записати в такий спосіб: $d(x;y)=0$, де $F(x;y)$ — така функція, що $d(x;y)=P(x;y)dx+Q(x;y)dy$. Звідси випливає, що загальний розв'язок рівняння (16.7) має вигляд $F(x;y) = C$. Розв'язання зводиться до пошука функції $F(x;y)$.

16.2. Диференціальні рівняння другого порядку

16.2.1. Основні поняття

Означення. *Рівняння виду:*

$$F\left(x, y, y^{/}, y^{//}\right)=0,$$

де x *– шукана змінна,* y *– шукана функція,* $y^{/}$ *і* $y^{//}$ *- її похідні, називається диференціальним рівнянням другого порядку.*

Звичайно вивчають рівняння, які можуть бути записані у вигляді (16.8), і розв'язаними відносно другої похідної:

$$y^{//}=f\left(x, y, y^{/}\right). \tag{16.8}$$

Розв'язком рівняння (16.8) називається функція $y = \varphi(x),\ x \in (a, b)$, що при підстановці в рівняння обертає його у тотожність. Графік розв'язку називається *інтегральною кривою.*

Умови

$$y=y_0\ ,\ y^{/}=y_0^{/} \text{ при } x = x_0 \tag{16.9}$$

називають *початковими умовами.*

Функція $y=\varphi(x, C_1, C_2)$ називається *загальним розв'язком* рівняння (16.8) у деякій області G, якщо вона є розв'язком рівняння (16.8) при будь-яких значеннях C_1 і C_2 й якщо при будь-яких початкових умовах (16.9) існують єдині значення постійних $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$ такі, що функція $y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0\right)$ задовільняє даним початковим умовам.

Будь-яка функція $y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0\right)$, що випливає із загального розв'язку $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ рівняння (16.8) при певних значеннях постійних $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$, називається *частинним розв'язком.*

16.2.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Означення. *Рівняння виду:*

$$y^{//}+py^{/}+qy=0,$$

де y — шукана функція, а p и q — дійсні числа, називається лінійним однорідним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Для розв'язування цього рівняння складають характеристичне рівняння:

$$k^2+pk+q=0$$

І відшукують його корені k_1, k_2. Загальний розв'язок рівняння має вид:

1) $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$, якщо корені дійсні і різні ($k_1 \neq k_2$) ;

2) $y=e^{kx}\left(C_1+C_2x\right)$, якщо корені кратні ($k_1=k_2=k$) ;

3) $y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$, якщо корені комплексні ($k_{1,2}=\alpha \pm i\beta$).

16.2.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Означення. *Рівняння виду*

$$y^{//}+py^{/}+qy=f(x)\ , \tag{16.10}$$

де p и q — дійсні числа, f (x) — неперервна функція, називається лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Загальний розв'язок рівняння (16.10) являє собою суму часткового розв'язку неоднорідного рівняння й загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Знаходження загального розв'язку однорідного рівняння ми знаходили вище. Для знаходження часткового розв'язку використовують *метод невизначених коефіцієнтів*.

16.3. Системи

16.3.1. Загальні поняття

Означення. *Сукупність рівнянь виду*

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \end{cases}$$

де x — незалежна змінна, y_1, y_2, …, y_n — шукані функції, y'_1, y'_2, …, y'_n – їхні похідні, називається системою диференціальних рівнянь першого порядку.

Система диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно похідних від невідомих функцій, називається *нормальною системою диференціальних рівнянь* і має такий вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{16.11}$$

Сукупність *n* функцій

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x), \tag{16.12}$$

визначених на інтервалі *(a, b),* називається *розв'язком* нормальної системи (16.11), якщо ці функції при підстановці в рівняння системи (16.11) обертають їх у тотожності.

Теорема Коші. *Якщо функції* $f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, …, $f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *і їхні частки похідні по* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *визначені й безперервні в деякій області G простору змінних* $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, *то, яка б не була внутрішня точка* $(x_0; y_{10}; y_{20}; \ldots; y_{n0})$ *області G, у деякому околі точки x_0 існує єдиний розв'язок системи* (16.11), що *задовольняє умовам*

$$y_1 = y_{10},\ y_2 = y_{20}, \ldots, y_n = y_{n0} \ \text{при}\ x = x_0. \tag{16.13}$$

Умови (16.13) називаються *початковими умовами розв'язку*, а задача пошуку розв'язання за заданими початкових умовами — *задачею Коші.*

Сукупність *n* функцій

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{cases} \tag{16.14}$$

залежних від *x* і від *n* довільних постійних C_1, C_2, …, C_n, будемо називати *загальним розв'язком* системи (16.11) у деякій області *G*, якщо при будь-яких значеннях постійних C_1, C_2, ..., C_n. ці функції представляють розв'язок системи і якщо будь-який розв'язок цієї системи може бути записаний у вигляді (16.14) при деяких значеннях постійних C_1, C_2, ..., C_n.

Сукупність *n* функцій

$$
\begin{cases}
y_1 = \varphi_1\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right), \\
y_2 = \varphi_2\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n = \varphi_n\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right),
\end{cases}
\tag{16.15}
$$

Які виходять із загального розв’язку (16.14) системи (16.11), при певних значеннях постійних $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \ldots, C_n = C_n^0$, будемо називати *частинним розв’язком* системи (16.11).

Якщо в області *G* виконані умови теореми Коші, то для знаходження часткового розв’язку (16.15) досить розв’язати рівняння

$$
\begin{cases}
\varphi_1\left(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = y_{10}, \\
\varphi_2\left(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = y_{20}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_n\left(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = y_{n0}
\end{cases}
$$

відносно C_1, C_2, ..., C_n, і підставити знайдені значення постійних у співвідношення (16.14).

Одним з основних методів знаходження розв’язків нормальних систем є *метод виключення невідомих.* За допомогою цього методу дана система зводиться до одного рівняння *n* - го порядку щодо однієї невідомої функції.

Якщо праві частини нормальної системи (16.11) є лінійними функціями щодо невідомих функцій y_1, y_2, ..., y_n, …то така система називається *однорідною* й має вигляд:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = P_{11}(x)y_1 + P_{12}(x)y_2 + \ldots + P_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\
\dfrac{dy_2}{dx} = P_{21}(x)y_1 + P_{22}(x)y_2 + \ldots + P_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{dy_n}{dx} = P_{n1}(x)y_1 + P_{n2}(x)y_2 + \ldots + P_{nn}(x)y_n + f_n(x).
\end{cases}
$$

Якщо функції $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ тотожньо дорівнюють нулю, то лінійна система називається *однорідною,* у іншому випадку – *неоднорідною*.

16.3.2. Системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами

Для простоти запису обмежимося системою трьох рівнянь із трьома невідомими функціями *x, y* и *z*:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\
\dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\
\dfrac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,
\end{cases}
\tag{16.16}
$$

де a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — дійсні числа, t — незалежна змінна.

До цієї системи можна застосувати загальний метод виключення невідомих, але можна вирішувати її й іншим, більше наочним методом, який застосовують тільки до систем лінійних рівнянь із постійними коефіцієнтами.

Будемо шукати частковий розв’язок системи в наступному виді:

$$
x = \alpha\, e^{kt}, \quad y = \beta\, e^{kt}, \quad z = \gamma\, e^{kt}, \tag{16.17}
$$

де α, β, γ *и* k - деякі числа (причому $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$), які треба визначити так, щоб функції (16.17) були розв'язком системи (16.16).

Підставляючи функції (16.17) і їхні похідні в рівняння системи (16.16) і скорочуючи на e^{kt}, одержимо

$$\begin{cases} k\alpha = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\ k\beta = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\ k\gamma = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma. \end{cases}$$

Переносячи всі члени в одну частину рівності й групируючи коефіцієнти при $\alpha, \beta, \gamma,$ одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-k)\,\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33}-k)\,\gamma = 0. \end{cases} \tag{16.18}$$

Система (16.18) — це однорідна система трьох рівнянь першого степеня із трьома невідомими α, β, γ. Як відомо, щоб ця система мала ненульовий розв'язок, необхідно й достатньо, щоб її визначник був рівним нулю, тобто щоб число k було коренем рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{16.19}$$

Рівняння (16.19) називається *характеристичним рівнянням* для системи (16.16). Воно є рівнянням третього степеня відносно k і має три корені: k_1, k_2 і k_3. Кожному кореню відповідає ненульовий розв'язок системи (16.18) $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;\alpha_2,\beta_2,\gamma_2;\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$, а отже, і частковий розв'язок даної системи (16.16):

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 e^{k_1 t}, & y_1 &= \beta_1 e^{k_1 t}, & z_1 &= \gamma_1 e^{k_1 t}; \\ x_2 &= \alpha_2 e^{k_2 t}, & y_2 &= \beta_2 e^{k_2 t}, & z_2 &= \gamma_2 e^{k_2 t}; \\ x_3 &= \alpha_3 e^{k_3 t}, & y_3 &= \beta_3 e^{k_3 t}, & z_3 &= \gamma_3 e^{k_3 t}. \end{aligned}$$

Якщо корені k_1, k_2 й k_3, характеристичного рівняння різні й дійсні, то, як можна показати, загальний розв'язок системи (16.16) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} x = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3, \\ y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3, \quad \text{або} \\ z = C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3. \end{cases} \quad \begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{k_1 t} + C_2\alpha_2 e^{k_2 t} + C_3\alpha_3 e^{k_3 t}, \\ y = C_1\beta_1 e^{k_1 t} + C_2\beta_2 e^{k_2 t} + C_3\beta_3 e^{k_3 t}, \\ z = C_1\gamma_1 e^{k_1 t} + C_2\gamma_2 e^{k_2 t} + C_3\gamma_3 e^{k_3 t}, \end{cases} \tag{16.20}$$

де C_1, C_2, C_3, — довільні постійні.

Якщо серед коренів характеристичного рівняння є комплексні, то комплексні розв'язки можна замінити дійсними, відокремлюючи дійсну й уявну частини знайдених функцій.

У випадку, коли серед коренів характеристичного рівняння є кратні, корень k_1 кратності r відповідає частковому розв'язку системи (16.16), що має вид

$$x = P_1(t)e^{k_1 t}, \quad y = P_2(t)e^{k_1 t}, \quad z = P_3(t)e^{k_1 t}, \tag{16.21}$$

де $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ — многочлени степеня не вище $r-1$, причому серед коефіцієнтів всіх цих многочленів r коефіцієнтів є довільними, а інші виражаються через них. Вважаючи по черзі один із цих довільних коефіцієнтів рівним одиниці, а інші рівними нулю, ми побудуємо r часткових розв'язків.